*

Intepretasjonsteoremer for en familie av ikke-klassiske intensjonale predikatkalkyler.

*

Morten Rognes

1974

INNHOLD

§1 Formålet med dette arbeidet....1
§1.2 Endel viktige begreper....1
§1.3 Første-ordens språk....1
§1.4 Første-ordens teorier....2
§1.5 Modeller for første-ordens språk....2
§2 Avbildningen @....3
§2.1 Avbildningen ¶....5
§2.2 Definisjon av en funksjon j som avbilder I:0-modellene inn i FMod(@(L))....6
§3 Relasjonen mellom det sterke intepretasjonsteoremet for I:0 og den sterke versjonen av fullstendighetsteoremet for I:0....14
§3.1 Konstruksjon av avbildningen ç....14
§4 En tese om ekvivalens....17
§5 Språket fl(L)....19
§6 Grunntrekkene i en modifisert versjon av modellteorien for I:0-språk....21
§7 Et intepretasjonsteorem for kalkylene av type I:0[Ç]....34
Referanser....37

§1 Formålet med dette arbeidet.

I det følgende skal vi studere intepretasjoner av de grunnleggende logikkene i Rognes [1] inn i et ekstensjonalt språk og bevise en rekke teoremer som vi vil kalle intepretasjons-teoremer. Intepretasjonene har en nær forbindelse med den type semantikk for intensjonale språk som vi har utformet i vår avhandling "Undersøkelser i intensjonal logikk", Rognes [1]. Intepretasjonsteoremene er i det vesentlige ekvivalente med visse av de fullstendighetsteoremene vi har bevist i denne avhandlingen. Sammenhengen mellom de to typer av teoremer er av en ikke-triviell natur siden teoremene begrepsmessig sett uttaler seg om tilsynelatende vidt forskjellige forhold. Vi er derfor av den mening at de resul-tatene vi beviser her kaster noe lys over fullstendighetsteoremene i Rognes [1].

Dette arbeidet forutsetter full fortrolighet med Rognes [1] og Rognes [2]. Notasjonen som benyttes her vil være den samme som i de to nevnte arbeider. Når det gjelder den logiske og mengdeteoretiske notasjon vi forøvrig benytter vil det være en fordel om leseren har satt seg inn i Rognes [3].

§1.2 Endel viktige begreper.

La oss benytte anledningen til å fiksere bruken av en del hyppig forekommende nøkkeluttrykk. Når vi taler om språk i det følgende mener vi enten I;0-, J;0- eller første-ordensspråk. Nøyaktig hva vi her mener med første-ordens språk vil bli forklart i neste avsnitt.

Med en intepretasjon av et språk L inn i et språk L' forstår vi en rekursiv funksjon π som avbilder Fml(L), mengden av formler i L, inn i Fml(L').

La L være et språk. Med en teori i L fortår vi da enhver delmengde X av formlene i L, dvs. enhver mengde X der vi har X Inkl Fml(L).

Anta nå at T, T' er teorier i henholdsvis L og L'. En intepretasjon av T inn i T' er da en intepretasjon π av L inn i L' som oppfyller det følgende krav:

$$(AF)(F\hat{e}Fml(L) \;\&\; F\hat{e}T \rightarrow \pi(F)\hat{e}T')$$

Anta igjen at T,T' er teorier i henholdsvis L og L'. Med en troverdig intepretasjon av T inn i T' forstår vi en intepretajon π av L inn i L' som oppfyller det følgende krav:

$$(AF)(F\hat{e}Fml(L) \rightarrow (F\hat{e}T \leftrightarrow \pi(F)\hat{e}T')).$$

Vi har introdusert disse begrepsdannelsene på dette punkt fordi de vil bli brukt temmelig ofte i det følgende.

§1.3 Første-ordens språk.

Med et første-ordens språk med beskrivelses-operator og singulære termer i snever forstand forstår vi det samme som et I;0-språk der vi har utelatt de følgende komponenter: (a) alle de intensjonale operatorene av typen T;<m,n>, (b) operatoren μ, (c) de intensjonale predikatkonstantene t;<m,n> og U.

Et første-ordens språk med singulære termer i snever forstand og beskrivelsesoperator er med andre ord definert på samme måte som et I;0-språk. Men i definisjonen av I;0-språk utelater vi uttrykkene av typen (a) – (c) og sløyfer alle de klausulene i definisjonen av av velformede uttrykk som referer til uttrykk av denne typen. Det som her kalles "første-ordens språk med beskrivelser og singulære termer i snever forstand" er altså ikke nøyaktig det

samme som det som i Shoenfield [1] kalles første-ordens språk. Hovedgrunnen er at våre første-ordens språk inneholder en bestemt beskrivelsesoperator.

Vi skal i det følgende, om ikke noe annet uttrykkelig sies, bruke termen "første-ordens språk" som forkortelse for "første-ordens språk med beskrivelsesoperator og singulære termer i snever forstand".

§1.4 Første-ordens teorier.

Anta L er et første-ordens språk. Med de logiske aksiomene i L forstår vi alle instanser av i L av aksiomskjemaene A1 – A7, A8, A10 og A12 – A14 i Rognes [1], Kapittel III, §1. Vi bruker uttrykket "Ax(L)" som betegnelse på denne mengden av formler i L. Med Th(L) forstår vi den minste formelmengden
Z Inkl Fml(L) som inneholder Ax(L) og som dessuten er lukket under modus ponens og universell generalisering. Med ß;f(Δ,L) forstås den minste formelmengden X Inkl Fml(L) der man har ΔUAx(L) Inkl X og hvor X dessuten er lukket under modus ponens oguniversell generalisering. Vi forutsetter her selvfølgelig at Δ Inkl Fml(L). Klassen av første-ordens teorier i L er derfor klassen av alle mengder ß;f(Δ,L) der Δ Inkl Fml(L). Vi bruker T,T' etc. for første-orens teorier i L om det er klart fra konteksten hvilket språk det dreier seg om.

I forbindelse med I;0-språk innførte vi i Rognes [1] en rekke syntaktiske begreper som for eksempel "bevis" og "bevisbar formel". Disse begrepene defineres på en helt analog måte for første-ordens språk.

Er T=ß;f(Δ,L) en første-ordens teori i L kaller vi Δ for de ikke-logiske aksiomene i T. Er FêFml(L) bruker vi "T:– F" som forkortelse for "F er bevisbar i T". At F er bevisbar i første-ordens teorie T i L innebærer at det finnes en endelig sekvens av formler F;0,....,F;n (n≥0) der F;n= F og som oppfyller det følgende krav: F;i (0≤i≤n) er enten en formel i ΔUAx(L) eller så har man at
F;i = (Ax)F;j der j<i for noe variabeltegn x i L, eller så finnes det k,j<i slik at
F;k= (F;j–> F;i). La oss nevne at dersom T= ß;f(Δ,L) er en første-ordens teori i L vil vi av og til skrive "ß;f(Δ,L) :– F" i stedet for "T :– F".

§1.5 Modeller for første-ordens språk.

La L være et første-ordens språk. Med en modell for L forstås en struktur R=<*,D,∏> der D er en ikke-tom mengde, * et objekt som ikke er med i D og ∏ er en valuasjon for L over domenet D. Denne valuasjonen er definert nøyaktig som valuasjonen i en I;0-modell unntatt ved at vi har sløyfet klausulene som sier noe om de intensjonale operatorene T;<m,n> og μ samt predikatkon-stantene t;<m,n> og U. Vi definerer gyldighet til en formel i en første-ordens modell R for L på samme måte som før. Alle de semantiske begrepene vi innførte i tilknytning til I;0-modellene i kapittel II i Rognes [1] innføres på en helt analog måte for første-ordens modeller. Vi gir derfor ikke detaljerte definisjoner her. Den følgende sats gjelder for første-ordens teorier og kan i det vesentlige sies å være bevist i Rognes [1]:

Teorem 1.5.1 (i) La L være et første-ordens språk og T = ß;f(Δ,L) en første-ordens teori i L. Anta R er en første-ordens modell for L og at R := Δ. Da gjelder R:= T. (ii) Anta T= ß;f(Δ,L) er en konsistent første-ordens teori i L. Da finnes en første-ordens modell for R for L som er en modell for T, med andre ord som er slik at R:= T.

I det følgende vil det ikke bli gjort direkte bruk av den andre delen, kompletthets-delen, av denne satsen. Derimot vil vi gjøre bruk av den første halvdelen.

La oss tilslutt bemerke at vi vil bruke uttrykket "FMod(L)" for å betegne klassen av

alle første-ordens modeller for L.

§2 Avbildningen @.

Vi bruker som tidligere I for å betegne klassen av alle I;0-språk.[1] I dette avsnittet skal vi definere en avbildning @ som til ethvert LêI tilordner et et bestemt første-ordens språk @(L). Dette skjer på den følgende måte:

Definisjon 2.1 Anta LêI. Da er @(L) definert ved hjelp av de følgende klausuler. (1) @(L) er et første-ordens språk. (2) Variabeltegnene er de samme i L og @(L). (3) @(L) inneholder alle de vanlige deskriptive symbolene i L, dvs. de n-ære predikatene i L for alle n≥1, de n-ære funksjonssymbolene i L for alle n≥1, de singulære termene i snever forstand i L samt alle konstantene i L. Videre inneholder @(L) alle predikatene av typen t;<m,n>, samt predikatet U. (4) @(L) inneholder visse spesielle funksjonssymboler: Anta FêFml(L) og at Grad(«F») = n. Da er ¥(«F») et n-ært funkjonssymbol i @(L). Her er ¥ en funksjon som til enhver matrise av grad n i L tilordner et n-ært funksjonssymbol for alle LêI. Av denne funsjonen krever vi videre at dersom FêFml(L) så er ¥(«F») ikke noe funksjonssymbol i L. Funksjonen skal også være en-entydig. (5) I tillegg til predikatene ovenfor inneholder @(L) også et predikat J;<m,n> for hvert <m,n>êNXN som er m+1'ært, videre et monadisk funksjonssymbol G samt et monadisk predikat V. Ingen av disse predikatene eller funksjonssymbolene er identiske med noen av dem som er nevnt tidligere og vi antar at ingen av disse uttrykkene forekommer i noe I;0-språk.

Dette avslutter definisjonen av første-ordens språket @(L) gitt at L er et I;0-språk.

Det er passende å fremsette en rekke kommentarer angående hvordan de enkelte symbolene i @(L) skal leses. Vi vil med andre ord gjøre rede for den intuitive, ikke-formelle, intepretasjonen av @(L) som vi har i tankene.

Når det gjelder termer av typen "G(x)" er det meningen at disse skal kunne leses "Intensjonen uttrykt av x" eller "Den intensjonen som x uttrykker", eventuelt "Den intensjonen som x representerer".

Uttrykket "V" er et predikat som står for universet. En formel av typen "V(x)" er det derfor meningen at skal leses "x er et element i universet" eventuelt "x er et individ", "x er et element".

Uttrykket "U" står for mengden av intensjoner. Dette innebærer at "U(x)" betyr "x er en intensjon". Man bør forøvrig legge merke til at ordet "intensjon" her brukes i den betydning som vi har forsøkt å gjøre rede for i Rognes [1].

De forskjellige "intensjonale predikatkonstantene" t;<m,n>, der <m,n>êNXN leses på den måten som vi har forklart i våre tidligere arbeider. Er f.eks. <1,0> indeksen til operatoren "x tror at F" så leses en formel av typen "t;<1,0>(x,y)" som "y er en intensjon x tror er tilfelle" eller alternativt "y er et forhold x tror foreligger". Tilsvarende om man tenker seg at <1,1> er indeksen til den intensjonale operatoren "x vet at F". En formel av arten "t;<1,1>(x,y)" leses i så fall "y er et forhold x vet at foreligger". Eventuelt kan bruke en av de følgende lesemåter: "y er noe x vet at er tilfelle", "y er en intensjon x vet er tilfelle". På samme måte med alle de andre intensjoale operatorene i L. Inneholder L "abstrakte", "uintepreterte" intensjonale operatorer vil de korresponderende intensjonale predikatkonstantene ikke kunne gis noen naturlig lesemåte. I prinsippet kan man godt tenke seg at L ikke inneholder noen slike operatorer og at indeksmengden er en endelig mengde, la oss si K;1XK;2 der K;1 og K;2 er

[1] Se Rognes [1], Kapittel I, §1.2.1. I denne avhandlingen brukes uttrykket "(I;0)*" for å betegne den samme mengden.

mengder av typen {0,1,2,....,k} for noe naturlig tall k.

Vi kommer nå til de forskjellige funksjonsymbolene av typen ¥(«F») i @(L) der F er en formel i L. I forbindelse med disse er det ikke så helt enkelt å gi noen naturlig, god lesemåte. Men anta at FêFml(L) og at Grad(F)=n. Da er det meningen om a;1,...,a;n er objekter i universet vi kvantifiserer over at uttrykket "¥(«F»)(a;1°,....,a;n°)" (her er "a;i°" et navn på objektet a;1) skal referere til n+1'tuplet <«F»,a;1,...,a;n>, med andre ord til det n+1'tuplet som har som første komponent matrisen «F» og hvor de resterende komponenter er objektene a;1,...,a;n tatt i denne rekkefølgen.[2] Er Grad(«F»)=0 er F en konstantfri formel som heller ikke inneholder noen fri forekomster av variabeltegn. I så tilfelle refererer ¥(«F») til 1-tuplet <«F»>. Man kan også redegjøre for betydningen til de diverse funksjonseymbolene ¥(«F») der FêFml(L) og Grad(«F»)=n≥0 på den følgende måten: ¥(«F») betegner en funksjon som til ethvert n-tuple <x;1,...,x;n> tilordner n-tuplet <«F», x;1,...,x;n>. I tilfelle Grad(«F»)=0 har man at ¥(«F») er en konstant i @(L).

La oss så se på de nye relasjonssymbolene J;<m,n> der <m,n>êNXN. Disse svarer en-entydig til de intensjonale operatorene T;<m,n> i L. Man kan i denne ammenheng se på enkelte eksempler: Er <1,0> indeksen til den intensjonale operatoren "x tror at F" så leses en formel av typen "J;<1,0>(x,y)" slik "y beskriver noe x tror er tilfelle" eller kortere "y beskriver noe x tror". Tilsvarende om <1,1> er indeksen til den intensjonale operatoren "x vet at F". I så fall leses "J;<1,1>(x,y)" som "y beskriver noe x vet er tilfelle" eller som "y beskriver noe x vet". Vi leser de andre predikatene på tilsvarende måte. Er f.eks. <1,2>,....,<1,5> indeksene til operatorene "x ser at F", "x hører at F", "x er av den mening at F","x forestiller seg i fantasien at F" leses "J;<1,2>(x,y)",....,"J;<1,5>(x,y)" som henholdsvis "y beskriver noe x ser", "y beskriver noe x hører", "y beskriver noe x mener er tilfelle" og "y beskriver noe x forestiller seg er tilfelle i fantasien".

Vi skulle nå ha gitt en mer uformell redegjørelse for lesemåten til de enkelte predikatene i @(L) om L er et I;0-språk.

Det er i prinsippet ikke noe i veien for å utvide @(L) med et rikere mengdeteoretisk og syntaktisk vokabular slik at man kan gi en nøyere beskrivelse av de forskjellige formlene og matrisene i L samt "komplekser" av typen <«F»,a;1,...,a;n>. Dette vil imidlertid ikke bli gjort her siden det vil føre med seg unødvendig mange komplikasjoner.

Når det gjelder forholdet mellom @(L) og L er det i en viss forstand rimelig å si at det ikke er mulig å forstå @(L) uten i relasjon til L. En del av grunnen til dette er at termer i @(L) kan sies å betegne formler i L. En annen grunn er at mengden av funsjonssymboler i @(L), som

---

[2] La L være et I;0-språk. Anta FêFml(L). I det følgende skal vi anta at "o" er et symbol som ikke opptrer i noe språk. Med «F», matrisen til F, forstår vi resultatet av å erstatte alle forekomster av konstanter og fri variabler i F med symbolet "o". Antallet forekomster av "o" i «F» kalles graden til «F». Vi kaller den første forekomsten av "o" i «F» for det første argumentstedet i «F», den andre forekomsten av "o" for det andre argumentstedet etc. I det følgende bruker vi "a", "b", "c","d", eventuelt påført tall som indekser, som syntaktiske variabler for enkle termer, dvs termer som enten er konstanter eller variabeltegn. Anta FêFml(L) og at «F» er av grad n. Da finnes det en entydig bestemt sekvens av enkle termer [a;1,....,a;n] av lengde n som er slik at dersom a;j settes inn på det j'te argumentstedet i «F» for j=1,...,n får man som resultat F. La [a;1,....,a;n] av n enkle termer. Vi bruker da uttrykket "«F»[a;1,....,a;n]" for å betegne resultatet av å sette inn termen a;j for den j'te forekomsten av "o" i «F». Skriver vi «F»[a;1,....,a;n] forutsetter vi at (i) «F» er av grad n og (ii) at variabeltegn som settes inn for o'er i «F» ikke blir bundet av kvantorer i «F». Man ser umiddelbart at dersom «F» = «G» så er F en substitusjonsinstans av G. Vi definerer en ekvivalensrelasjon "~;m" ved å sette at <F,G>ê ~;m hvis og bare hvis «F» = «G». Vi bruker "[F]~;m" for å betegne ekvivalensklassen til formelen F med hensyn på ekvivalensrelasjonen ~;m.

Det bør bemerkes at alle de begrepene som er innført ovenfor innføres på akkurat samme måte om vi arbeider med J;0-språk. Se Rognes [2], Del I, §2.

man ser fra redegjørelsene ovenfor, er bestemt av mengden av formler og matriser i L. I en forstand kan man derfor si at vi ikke har lykkes i å fjerne alle mulige "intensjonale elementer" fra @(L). Imidlertid brukes ingen intensjonale uttrykksmåter i @(L). Det er bare slik at visse formler og matriser som inneholder intensjonale uttrykk nevnes i @(L). Dette forhindrer derfor ikke at @(L) kan regnes som et helt ekstensjonalt språk i motsetning til L som kan oppfattes som et "genuint" intensjonalt språk.

§2.1 Avbildningen ¶.

I dette avsnittet skal vi definere presist en funksjon ¶ som tilordner mengden av velformede uttrykk i L, der vi forutsetter at L er et I;0-språk, velformede uttrykk i @(L). Avbildningen ¶ er definert slik:

Definisjon 2.1.1 Anta L er et I;0-språk da er ¶ definert induktivt på lengden av velformede uttrykk i L ved de følgende klausuler:

(1) ¶(x) = x om x er et variabeltegn i L
(2) ¶(e) = e om eêConst(L)
(3) ¶(t) = t om t er en singulær term i snever forstand i L
(4) ¶((ix)F) = (ix)(V(x) & ¶(F)) forutsatt at FêFml(L) og x er et variabeltegn i L.
(5) ¶(μ(F)) = G(¥(«F»)(a;1,....,a;n)) forutsatt at F = «F»[a;1,...,a;n] og vi antar at FêFml(L) og a;1,...,a;n er de variabeltegn og konstanter som forekommer i F.
(6) ¶(f(t;1,...,t;n)) = f(¶(t;1),....,¶(t;n)) om f er et funkjonsymbol i L og t;1,..,t;n er termer i L.
(7) ¶(¬F) = ¬¶(F) om FêFml(L)
(8) ¶(F–>G) = ¶(F) –> ¶(G) om F,GêFml(L)
(9) ¶(P(t;1,...,t;n)) = P(¶(t;1),....,¶(t;n)) om P er et n-ært predikat i L og t;1,...,t;n er termer i L.
(10) ¶((Ax)F) = (Ax)(V(x) –> ¶(F)) forutsatt at F er en formel i L og x et variabeltegn i L.
(11) ¶(T;<m,n>(t;1,...,t;n,F)) = J;<m,n>(¶(t;1),...,¶(t;n), ¥(«F»)(a;1,...,a;n)) forutsatt at F = «F»(a;1,....,a;n) og at t;1,...,t;n er termer i L.

I det følgende er det også hensiktsmessig å definere en viss funksjon e slik:

Definisjon 2.1.2 Anta FêFml(L). Da setter vi:

e(F) = V(c;1) &...& V(c;n). –> ¶(F)

der c;1,...,c;n utgjør de variabeltegnene som forekommer fri i F samt de konstantene som forekommer i F.

Det følgende lemma vil også bli benyttet i den videre fremstillingen.

Lemma 2.1.1 Anta FêFml(L), têTerm(L). Da gjelder:

(a) ¶(F);(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n] = ¶(F;(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n])
(b) ¶(t);(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n] = ¶(t;(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n])

forutsatt at x;1,...,x;n er de variabeltegnene som forekommer fri i F (eventuelt termen t) og hvor a;1,...,a;n er konstanter eller variabeltegn i L.

Beviset for denne satsen er på lengden av velformede uttrykk i L. Siden det er av en rent rutinemessig karakter overlates beviset til leseren.

Anta nå at L er et I;0-språk. Vi skal betrakte en rekke aksiomskjemaer i @(L). Det dreier seg om de følgende som her vil bli betegnet med B1 – B14. I disse formlene er det meningen at a;i'ene betegner uttrykk som enten er variabeltegn eller konstanter:

B1 t;<m,n>(x;1,...,x;m,G(¥(«F»)(a;1,...,a;n))) <–> J;<m,n>(x;1,....,x;m,¥(«F»)(a;1,...,a;n))

B2 t;<m,n>(x;1,...,x;n,y) –> U(y)

B3 V(a;1) &...& V(a;n). –> U(G(¥(«F»)(a;1,...,a;n)))

B4 Konj/i,1,n/(V(a;i)) & Konj/i,1,m/(V(a';i)) –> G(¥(«F»)(a;1,...,a;n)) ≠ G(¥(«H»)(a';1,...,a';m)) forutsatt at F ikke er noen substitusjonsinstans av H

B5 Konj/i,1,n/(V(a;i)) & Konj/i,1,n/(V(a';i)) . –> G(¥(«F»)(a;1,...,a;n)) = G(¥(«F»)(a';1,...,a';m)) –> Konj/i,1,n/(a;i=a';i)

B6 V(x;1) &...& V(x;n). <–> V(f(x;1,...,x;n))

B7 P(x;1,...,x;n) –> Konj/i,1,n/(V(x;i))

B8 U(x) –> V(x)

B9 J;<m,n>(x;1,...,x;m,y) –> Konj/i,1,m/(V(x;i))

B10 t;<m,n>(x;1,...,x;m,y) –>. Konj/i,1,n/(V(x;i)) & V(y)

B11 (a) t;<m,n>(x;1,...,x;m,G(¥(«F»)(a;1,...,a;n))) –> e(F) forutsatt at <m,n>êh og FêFml (L). (n≥0)

(b) J;<m,n>(x;1,....,x;m,¥(«F»)(a;1,...,a;n)) –> e(F) forutsatt at <m,n>êh og FêFml (L). (n≥0)

B12 ¥(«F»)(x;1,...,x;n) = y –> Konj/1,i,n/(V(x;i))

B13 «F» ≠ «G» –> ¥(«F»)(x;1,...,x;m) ≠ ¥(«G»)(y;1,...,y;q) forutsatt at F,GêFml(L) og Grad(«F»)=n og Grad(«G»)=q.

B14 (x=d. –> V(x))& (x=e –> V(x)) forutsatt at d er en singulær term i snever forstand og e er en konstant i L.

I alle aksiomskjemaene ovenfor forutsettes det at F,G,HêFml(L) og at <m,n>êNXN. Videre forutsettes det, når vi skriver ¥(«F»)(a;1,...,a;n) at F=«F»[a;1,...,a;n]. I denne forbindelse baserer vi oss på det begrep 'matrise' som ble innført i Rognes [2].

Definisjon 2.1.3 Anta L er et I;0-språk. Vi betegner da den første-ordens teorien i @(L) som har B1 – B14 som de eneste ikke-logiske aksiomene med C*(I;0,@(L)).

Betegner vi klassen av alle instanser av aksiomskjemaene B1 – B14 i @(L) med Δ;0 har vi i lys av Definisjon 2.1.3 at ß;f(Δ;0, @(L)) = C(I;0,@(L)).

På dette punkt kan det også bemerkes at man kan klare seg uten aksiom B1 om vi forandrer på definisjonen av ¶, Definisjon 2.1.1, på et punkt, nemlig når det gjelder klausul (11) og erstatter denne med:

(11+) ¶(T;<m,n>(t;1,...,t;n,F)) = t;<m,n>(¶(t;1),...,¶(t;n), ¥(«F»)(a;1,...,a;n))

Man kan i så fall sløyfe predikatene av typen J;<m,n> fra språket @(L).

§2.2 Definisjon av en funksjon j som avbilder I:0-modellene inn i FMod(@(L)).

Vi gjør oppmerksom på at vi i det følgende bruker "I;<n,1>" for å betegne den funksjonen som til ethvert n-tuple <x;1,...,x;n> tilordner det første elementet i tuplet, dvs. x;1. Vi skal

definere en funksjon j som har Mod;(I;0)(L) som domene og hvor verdiområdet er inkludert i FMod(@(L)), klassen av første-ordens modeller for @(L). Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 2.2.1 Anta RêMod;(I;0)(L). Da er j(R)=<*',D',∏'> der komponentene *',D' og ∏' er definert slik:

(i) *' = *
(ii) D' = |R|UCFml(£(R))
(iii) ∏' er en valuasjon som er definert ved:
  (a) ∏'(e) = ∏(R)(e) om e er en konstant i L
  (b) ∏'(d) = ∏(R)(d) om d er en singulær term i snever forstand i L
  (c) ∏'(P) = ∏(R)(P) om P êPred;n(L) (n≥1)
  (d) ∏'(f) = ∏(R)(f)U Rest((I;<n,1>), (CFml(£(R))– |R|)^n) om fêFunk;n(L) (n≥1)
  (e) ∏'(t;<m,n>) = ∏(R)(t;<m,n>)
  (f) ∏'(U) = ∏(R)(U)
  (g) ∏'(J;<m,n>) = Mg(<x;1,...,x;n,y>: yê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;n)) forutsatt at <m,n>êNXN.
  (h) ∏'(¥(«F»)) = Mg(<«g(F)»[f(x;1),....,f(x;n)],x;1,....,x;n>: x;1,...,x;nê|R|) U Rest((I;<n,1>), (CFml(£(R))– |R|)^n) forutsatt at FêFml(L) og Grad(«F»)=n.
  (i) ∏'(V) = |R|
  (j) ∏'(G) = G(R)U Rest(I,CFml(£(R))–|R|)

Bemerkning: Vi bruker de samme navnene i j(R) og R på elementene i |R|. Når det gjelder elementene i CFml(£(R)) – |R| bruker vi nye navn i j(R) som ikke brukes i modellen R.

På dette punkt formulerer vi noen viktige hjelpesetninger:

Lemma 2.2.1 Anta at L er et I;0-språk. Anta videre at RêMod;(I;0)(L) og anta at FêCFml(L(R)) og têCTerm(L(R)). Da gjelder:

(i) R(F) = j(R)(¶(F))
(ii) R(t) = j(R)(¶(t))

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på lengden av klassen av de velformede uttrykkene i L.

(a) Anta t = μ(F) for en eller annen formel F i L. Da har vi på den ene side (1) R(μ(F)) = G(R)(g;R(F)) På den annen side:

(2) j(R)(¶(μ(F))) = j(R)(G(¥(«F»)(a;1,....,a;n)))
= j(R)(G)(j(R)(¥(«F»)(a;1,....,a;n)))
= j(R)(G)((j(R)(¥(«F»))(j(R)(a;1),.....,j(R)(a;n)))
= G(R)((j(R)(¥(«F»))(R(a;1),.....,R(a;n)))
= G(R)(«g;R(F)»[f(R(a;1)),.....,f(R(a;n))])
= G(R)(g;R(F))

Den siste identiteten holder siden:

g;R(F) = g;R(«F»[a;1,....,a;n]) = «g;R(F)»[g;R(a;1),....,g;R(a;n)]
= G(R)(«g;R(F)»[f(R(a;1)),.....,f(R(a;n))])

At disse identitetene holder skulle det ikke være så vanskelig å innse når man erindrer definisjonen av L-morfien g;R og husker på definisjonen av hva vi forstår med en matrise. Det kan også være gunstig å huske på definisjonen av uttrykk av typen: «F»[a;1,...,a;n]. Man bør også huske på at dersom a enten er en konstant eller et navn har vi per definisjon

g;R(a) = f;R(R(a)), dvs.
R(a) = (f;R);-1(g;R(a)) om RêMod;(I;0)(L).

(b) Tilfellet der t=eêConst(L) er trivielt siden vi per definisjon har j(R)(¶(e)) = j(R)(e) = R(e). Likeledes er tilfellet der t=b, hvor b er en singulær term i snever forstand, trivielt.

(c) t = (ix)F. Vi har da R(t) = R((ix)F). Vi skiller her mellom to hovedtilfeller:
Tilfelle 1: R((ix)F) = a for noe aê|R|. Da finnes det et og bare et navn i, nemlig navnet på a, som er slik at R(F;x[i]) = 1. I lys av induksjonshypotesen er dette ekvivalent med at det finnes et og bare et navn i, der dette er navnet på a, slik at j(R)(¶(F;x[i])) = 1. I lys aven tidligere hjelpesetning er dette ekvivalent med: j(R)(¶(F);x[i])=1. Siden i er navn aê|R| = j(R)(V) har vi j(R)(V(i)) = 1. Det følger at det finnes et og bare et navn i slik at
j(R)(V(i) & ¶(F);x[i]) = j(R)((V(x) &¶(F));x[i]) =1 og at i er navn på a. Men da har man: R((ix)F) = a = j(R)((ix)(V(x) &¶(F))).
Tilfelle 2: R((ix)F) = *. I dette tilfelle skiller vi mellom to undertilfelle:
Tilfelle 2.1: Det finnes intet navn i i L(R) slik at R(F;x[i]) = 1. Anta at det fantes et navn i' i @(L)(j(R)) slik at j(R)((V(x)&¶(F));x[i']) = 1. Da har vi for dette navnet i' at j(R)(V(i') & ¶(F);x[i']) = 1. Det følger derfor at
(1) j(R)(¶(F);x[i']) =1 og at i' er et navn på et element i |R|. Da er i' et navn i L(R) og etter Lemma 2.1.1, (1) og induksjonshypotesen følger da:
j(R)(¶(F;x[i'])) = R(F;x[i']) =1. Men dette er umulig. Det følger at:
j(R)((ix)(V(x)&¶(F))) = j(R)(¶((ix)F)) = * = R((ix)F)
Tilfelle 2.2: Det finnes to distinkte navn i1, i2 slik at
R(F;x[i1]) = R(F;x[i2]) =1
Det er da lett å vise at det også må være slik at
j(R)((V(x)&¶(F));x[i1]) = j(R)((V(x)&¶(F));x[i2]) = 1
Det følger i så fall at j(R)(¶((ix)F)) = * = R((ix)F).

(d) F= P(t;1,...,t;n) der P er et n-ært predikat og t;1,...,t;n er termer. I så fall har man:
R(P(t;1,...,t;n)) = 1 <–> <R(t;1),....,R(t;n)>êR(P)
<–> <j(R)(¶(t;1)),...,j(R)(¶(t;n))>êj(R)(P)
<–> j(R)(P(¶(t;1),...,¶(t;n))) = 1
<–> j(R)(¶(P(t;1,....,t;n))) =1
Dette viser at satsen også holder i dette tilfellet.

(e) F = t;<m,>(t;1,....,t;m,t;(m+1)). Da har man:
R(t;<m,>(t;1,....,t;m,t;(m+1))) =1 <–>
<R(t;1),....,R(t;(m+1)>êR(t;<m,n>) =
Mg(<x;1,....,x;m,y>: yêG(R)"*f*;<m,n>(x;1,...,x;m))
<–> R(t;(m+1))êG(R)"*f*;<m,n>(R(t;1),....,R(t;m))
<–> <j(R)(¶(t;1)),...,j(R)(¶(t;(m+1)))>êj(R)(t;<m,n>)
<–> j(R)(t;<m,n>(¶(t;1),....,¶(t;(m+1)))) =1
<–> j(R)(¶(t;<m,n>(t;1,....,t;(m+1)))) =1
Satsen holder derfor i dette tilfellet.

(f) F = T;<m,n>(t;1,...,t;m,H). Da har man på den ene side:
R(T;<m,n>(t;1,...,t;m,H)) =1 <–> g;R(H)ê*f*;<m,n>(R)(R(t;1),....,R(t;m))
På den annen side har man:
j(R)(¶(T;<m,n>(t;1,...,t;m,H))) =1 <–>
j(R)(J;<m,n>(¶(t;1),....,¶(t;m), ¥(«H»)(a;1,....,a;n)) <–>

<j(R)(¶(t;1)),...,j(R)(¶(t;m)),j(R)(¥(«H»)(a;1,....,a;n))>ê
Mg(<x;1,...,x;m,y>: yê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)) <–>
j(R)(¥(«H»)(a;1,....,a;n))ê*f*;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;m)) <–>
«g;R(H)»[f(R(a;1)),...,f(R(a;n))]ê*f*;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;m)) <–>
g;R(H)ê*f*;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;m)) som er det vi ønsker.

(g) F= (Ax)H der HêCFml(L(R)). Da har vi:
R((Ax)H) =1 hvis og bare hvis R(H;x[i])=1 for alle navn i L(R). Dette holder i sin tur i lys av induksjonshypotesen hvis og bare hvis j(R)(¶(H;x[i])) = 1 for alle navn i i L(R). Dette er ekvivalent med j(R)((¶(H));x[i]) =1 for alle navn i i L(R). Dette innebærer nøyaktig det samme som j(R)(V(i) –> ¶(H);x[i]) =1 for alle navn i i @(L)(j(R)). Dette er så ekvivalent med j(R)((Ax)(V(x) –> ¶(H))) =1 som i sin tur er ekvivalent med j(R)(¶((Ax)H)) =1. Dette viser at påstanden holder.

De resterende tilfelle for formler av typen ¬F og F–>G overlates til leseren. Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Lemma 2.2.2 Anta at L er et I;0-språk. Anta videre at
RêSem;(I;0)(L) Inkl Mod;(I;0)(L). Da gjelder det at j(R) er en modell for første-ordens teorien C(I;0,@(L)).

Bevis: Anta at L er et I;0-språk og videre at RêSem;(I;0)(L). Vi skal vise at j(R) er en modell for C(I;0,@(L)). Beviset for dette består i å verifisere at alle aksiomene B1 – B14 er gyldige i j(R). Når det gjelder B7 – B10 er såpass enkelt at vi overlater oppgaven til leseren. Likeledes skulle det ikke være vanskelig å vise at B2 er gyldig i j(R). Vi ser imidlertid litt nøyere på aksiom B1:
En J(R)-instans av B1 vil være av typen:
t;<m,n>(i;1,...,i;m,G(¥(«F»)(a';1,...,a';n))) <–>
J;<m,n>(i;1,....,i;m,¥(«F»)(a';1,...,a';n)) der i;1,...,i;m er navn i @(L)(j(R)) og a';1,...,a';n er konstanter eller navn i det samme språket. Anta nå at
j(R)(t;<m,n>(i;1,...,i;m,G(¥(«F»)(a';1,...,a';n)))) =1. Dette er tilfelle hvis og bare hvis
<j(R)(i;1),...,j(R)(i;m), j(R)(G(¥(«F»)(a';1,...,a';n)))> êj(R)(t;<m,n>)
=R(t;<m,n>) = Mg(<x;1,...,x;m,y>: yêG(R)"*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m))
Dette holder i sin tur hvis og bare hvis:
j(R)(G(¥(«F»)(a';1,...,a';n))) ê G(R)"*f*;<m,n>(R)(j(R)(i;1),...,j(R)(i;m))
Dette er ekvivalent med:
G(R)(«g;R(F)»[f(R(a';1)),....,f(R(a';n))] ê
G(R)"*f*;<m,n>(R)(j(R)(i;1),...,j(R)(i;m))
som sier det samme som.
G(R)(j(R)(¥(«F»)(a';1,...,a';n)) = G(R)(H)
& Hê*f*;<m,n>(R)(j(R)(i;1),...,j(R)(i;m)) for noen HêCFml(L(R)).
Dette holder, fordi G(R) er en-entydig i en seminormal I;0-modell R, hvis og bare hvis:
<j(R)(¥(«F»)(a';1,...,a';n)),j(R)(i;1),...,j(R)(i;n)>êj(R)(J;<m,n>) <–>
j(R)(J;<m,n>(i;1,...,i;m, ¥(«F»)(a';1,...,a';n)))
Dette viser at B1 er gyldig i J(R).
Som ytterligere et eksempel tar vi for oss B11b. I lys av definisjonen av e er det tilstrekkelig å bevise at den følgende formel er gyldig:
(1) J;<m,n>(x;1,...,x;m,¥(«F»)(a;1,...,a;n)) –>. V(y;1)&...&V(y;j) –> ¶(F)
der y;1,...,y;j er de variablene som forekommer fri i F. Disse må åpenbart være blandt a;1,...,a;n slik at j≤n. Det er klart at (1) er ekvivalent med:

(2) V(y;1)&...&V(y;j) –>.J;<m,n>(x;1,...,x;m,¥(«F»)(a;1,...,a;n)) –> ¶(F)
En j(R)-instans av (2) vil derfor være en formel av typen:
V(i';1) &...&V(i';j) –>J;<m,n>(i;1,...,i;m,¥(«F»)(a';1,...,a';n)–>
¶(F;(y;1,....y;j)[i';1,....,i';j]
Anta nå j(R)(V(i';1) &...&V(i';j) & J;<m,n>(i;1,...,i;m,¥(«F»)(a';1,...,a';n)) =1. Da følger det at i';1,....,i';j er navn på objekter i |R|. Dessuten følger:
j(R)(J<m,n>(i;1,...,i;m,¥(«F»)(a';1,...,a';n)) =1 Herav har vi:
<j(R)(i;1),...,j(R)(i;m), j(R)(¥(«F»)(a';1,...,a';n))>êj(R)(J;<m,n>).
Dette impliserer i sin tur:
j(R)(¥(«F»)(a';1,...,a';n))ê*f*;<m,n>(R)(j(R)(i;1),...,j(R)(i;m))
I lys av definisjonen av j(R) følger herav:
«g;R(F;(y;1,....y;j)[i';1,....,i';j)»[f(R(a';1)),...,f(R(a';n))ê
f;<m,n>(R)(j(R)(i;1),...,j(R)(i;m))
Fra dette følger g;R(F;(y;1,....y;j)[i';1,....,i';j)ê*f*;<m,n>(R)(j(R)(i;1),...,j(R)(i;m)) og derfor siden <m,n>êh, dvs. er indeksen til en streng intensjonal operator at, at g;R(F;(y;1,....y;j)[i';1,....,i';j)êTr;L(R). Dette innebærer at R(F) =1 og derfor ved hjelp av foregående lemma at j(R)(¶(F;(y;1,....y;j)[i';1,....,i';j)) =1 som er det vi ønsker.

Oppgaven som består i å verifisere at de resterende av aksiomene B1 – B14 er gyldige i j(R) overlates til leseren. **Q.E.D.**

Vi kan nå formulere et viktig resultat:

Teorem 2.2.3 (Intepretasjonsteorem I) Anta L er et I;0-språk. Da gjelder om FêFml(L) at FêTh(I;0,L) <–> e(F) êC(I;0,@(L))

Bevis:

(A) Kondisjonalen mot høyre bevises ved induksjon på teoremer i systemet I;0. Det er ikke spesielt vanskelig å verifisere at dersom GêAx(I;0,L) så har man e(G)êC(I;0,@(L)) og at man dessuten har e(G), e((Ax)F)êC(I;0,@(L)) om man har at e(F) og e(F–>G) er med i C(I;0,@(L)). Vi skal se på endel av aksiomskjemaene som inngår i Ax(I;0,L). Når det gjelder de rent setningslogiske aksiomkjemaene skulle saken være temmelig opplagt.

(a) Anta G = (Ax)F –> F;x[a] der a er en konstant eller et variabeletegn i L. Da har man at e(G) er følgende formel:

V(a)& V(b;1)&...&V(b;n) –> (Ax)(V(x) –> ¶(F)) –> ¶(F);x[a] der b;1,..,b;n er de variablene som forekommer fri i (Ax)F samt de konstantene som forekommer i denne formelen. Som man umiddelbart ser har vi at e(G) er et teorem i C(I;0,@(L)).

(b) Anta G= (Ax)(F –> H) –> (F–>(Ax)H) der x ikke forekommer fri i F. Man har da at e(G) vil være en formel av den følgende form:
V(a;1)&...&V(a;n) –>. (Ax)(V(x) –>.¶(F)–>¶(H)) –> (¶(F) –> (Ax)(V(x) –>¶(H)))
Igjen er det imidlertid meget lett å se at e(G) er et teorem i C(I;0,@(L).

(c) Det skulle heller ikke være noen vanskeligheter med å se at oversettelsene av identitetsaksiomene er teoremer i C(I;0,@(L)).
Vi har nå sett på aksiomskjemaene A1 – A7 i kapittel III i Rognes [1]

(d) Anta G= (t;1 = r;1& ... & t;m = r;m –> (P(t;1,...,t;m) –> P(r;1,...,r;m)) der t;1,...,t;m,r;1,...,r;m er termer i L og P et m-ært predikat i L (m≥1). La a;1,...,a;q være de konstantene og fri variablene som forekommer i G. Da har man at e(G) er

Konj/i,1,q/(V(a;i)) & Konj/i,1,m/(¶(t;i)=¶(r;i)) –>
P(¶(t;1),...,¶(t;m)) –> P(¶(r;1),...,¶(r;m))

Det skulle være åpenbart at e(G) i dette tilfellet er et teorem i C(I;0,@(L)).

(e) G= (P(t;1,...,t;n) –> (Ex)(x= t;i)) der i =1,..,n og det forutsettes at P er et n-ært

predikat i L, t;1,...,t;n termer i L og x ikke forekommer fri i t;i. La a;1,...,a;j være de konstantene og fri variablene som forekommer i G. Vi har da at e(G) er:

Konj/i,1,j/(V(a;i)) –>. P(¶(t;1),...,¶(t;n)) –> (Ex)(V(x)& x=¶(t;k)) (k=1,...,n).

Ved hjelp av B7 er det da ikke spesielt vanskelig å vise at e(G)êC(I;0,@(L)). Er P enten et predikat av typen t;<m,n> eller prediaktet U kan man benytte B10 og B8. Det bør imidlertid i denne forbindelse bemerkes at det rent formelle beviset for at e(G)êC(I;0,@(L)) ikke er helt kort.

(f) Aksiomskjemaet A11 behandles omtrent på samme måte som A8. Men i beviset for at oversettelsen er et teorem i C(I;0,@(L)) må man nå benytte B9.

(g) A12 byr ikke på spesielle problemer. Anta

G = (Ex)(x = f(t;1,...,t;n)) <–> Konj/i,1,n/((Ex)(x=t;i))

der x ikke forekommer fri i noen av termene t;1,...,t;n. La a;1,...,a;j være de konstantene og fri variablene som forekommer i G. Da har man at e(G) er:

Konj/i,1,j/(V(a;i)) –> [(Ex)(V(x) & x=f(¶(t;1),...,¶(t;n))) <–>
Konj/i,1,n/((Ex)(V(x) & x= ¶(t;i)))

Det er imidlertid ikke vanskelig å bevise e(G)êC(I;0,@(L)).

(h) G = [y = (ix)F <–> (Ax)(F <–> x=y)] der y ikke forekommer fri i F. Anta a;1,...,a;j er de fri variablene utenom y og konstantene som forekommer i F. Da har man at e(G) er:

Konj/1,1,j/(V(a;i)) & V(y) –>. y = (ix)(V(x) &¶(F)) <–>
(Ax)(V(x) –> (¶(F) <–> x=y))

Heller ikke i dette tilfellet er det særlig vanskelig å bevise e(G)êC(I;0,@(L)).

(i) Er G et av aksiomskjemaene A15 – A20 kan man forholdsvis lett vise at man har e(G)êC(I;0,@(L)) ved hjelp ab B1 – B5, B11a og B11b.

Tilslutt kan det bemerkes at det ikke byr på spesielle problemer å vise at Mg(F: FêFml(L) & e(F)êC(I;0,@(L))) er lukket under modus ponens og universell generalisering.

(B) Vi beviser kondisjonalen mot venstre: Anta ¬(FêTh(I;0,L)). I følge kompletthetsteoremet for I;0 finnes det da en RêSem;(I;0)(L) og en R-instans G= F;(x;1,...,x;n)[i;1,....,i;n] av F slik at (1) R(G)=0. I lys av Lemma 2.2.1 har man da at j(R)(¶(G)) =0. Dette innebærer at (2) j(R)(e(G)) = 0 siden e(G) = ¶(G) i dette tilfellet. Anta nå for reduktio ad absurdum at vi hadde

(3) e(F)êC(I;0,@(L))

Da måtte man i lys av Lemma 2.2.2, siden j(R) er en modell for C(I;0,@(L)) ha at

(4) j(R)(e(F);(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]) = 1

Men nå har man:

(5) j(R)(e(F);(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]) =
j(R)((V(x;1)&...&V(x;n).–> ¶(F));(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n])
= j(R)(V(i;1)&...&V(i;n). –> ¶(F);(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n])
= j(R)(¶(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n])) = j(R)(¶(G)) = j(R)(e(G)).

Man merker seg at vi her har brukt Lemma 2.1.1. Men (4) og (5) strider mot (2). Dette viser at påstanden holder. **Q.E.D.**

Lemma 2.2.3.1 Følgende formler er teoremer i C(I;0,@(L)):

(a) (Ex)(V(x) &x=f(t;1,...,t;n)) –> Konj/i,1,n/((Ex)(V(x) & x=t;i))

(b) Konj/i,1,n/((Ex)(V(x) & x=t;i)) –> (Ex)(V(x) &x=f(t;1,...,t;n))

Bevis: Ad (a): Den følgende deduksjon viser at denne delen av satsen holder:
I lys av identitetsaksiomene har vi:

(1) V(x) & x=f(t;1,...,t;n) –> V(f(t;1,...,t;n))

Videre har vi i lys av aksiomene for funksjonsymboler:

(2) x =f(t;1,...,t;n) –> (Ey)(y = t;i) (i=1,....,n)

Identitsaksiomene rettferdiggjør også:

(3) y = t;i –> f(t;1,...,t;n) = f(t;1,...,t;(i-1),y,t;(i+1),...,t;n)

Herav følger ved hjelp av elementære manipulasjoner:

(4) x=f(t;1,...,t;n) & y= t;i. –> x = f(t;1,...,t;(i-1),y,t;(i+1),...,t;n)

Fra formlene av typen (4) kan man slutte:

(5) x= f(t;1,...,t;n) & Konj/i,1,n/(y;i=t;i). –> x = f(y;1,....,y;n)

Herav:

(6) V(x) & x= f(t;1,...,t;n) & Konj/i,1,n/(y;i=t;i). –> V(x) &x = f(y;1,....,y;n)
–> V(f(y;1,....,f(y;n)))
–> V(y;1) & ...& V(y;n)

Fra dette følger åpenbart:

(7) V(x) & x= f(t;1,...,t;n) & Konj/i,1,n/(y;i=t;i). –>
Konj/i,1,n/(V(y;i) &y;i=t;i)

Ved bruk av regelen om eksistensiell generalisering kan man herav slutte:

(8) V(x) & x= f(t;1,...,t;n) & Konj/i,1,n/(y;i=t;i). –>
Konj/i,1,n/((Ex)(V(x) & x=t;i))

Ved å bruke E-introduksjonsregelen utleder man:

(9) V(x) & x= f(t;1,...,t;n) & Konj/i,1,n/((Ex)(x=t;i)). –>
Konj/i,1,n/((Ex)(V(x) & x=t;i))

(10) (Ex)(V(x) & x= f(t;1,...,t;n)) & Konj/i,1,n/((Ex)(x=t;i)). –>
Konj/i,1,n/((Ex)(V(x) & x=t;i))

Ved hjelp av A13 kan man slutte:

(11) x=f(t;1,...,t;n) –> Konj/i,1,n/((Ex)(x=t;i))

Herav følger ved hjelp av setningslogikk:

(12) V(x) & x=f(t;1,...,t;n) –> Konj/i,1,n/((Ex)(x=t;i))

Bruk av E-introduksjonsregelen gir:

(13) (Ex)(V(x) & x=f(t;1,...,t;n)) –> Konj/i,1,n/((Ex)(x=t;i))

Fra (10) og (13) følger så ved hjelp av ren setnigslogikk:

(14) (Ex)(V(x) &x=f(t;1,...,t;n)) –> Konj/i,1,n/((Ex)(V(x) & x=t;i))

Ad (b): I kraft av identitetsaksiomene har vi:

(1) x= f(y;1,...,y;n) & Konj/i,1,n/(y;i = t;i) –> x = f(t;1,...,t;n)

Fra dette følger ved hjelp av setningslogikk:

(2) x= f(y;1,...,y;n) & Konj/i,1,n/(V(y;i) & y;i = t;i) –> x = f(t;1,...,t;n)

Ved hjelp av setningslogikk og aksiom B6 følger så:

(3) x= f(y;1,...,y;n) & Konj/i,1,n/(V(y;i) & y;i = t;i) –>.
V(x) & x = f(t;1,...,t;n)

I lys av A13 har vi:

(4) (Ex)(x= f(y;1,....,y;n)) <–> (Ex)(x=y;1) &.... & (Ex)(x=y;n)

Ved hjelp av identitetsaksiomene har man:

(5) Konj/i,1,n/(Ex)(x= y;i)

Fra (4) og (5) følger:

(6) (Ex)(x= f(y;1,....,y;n))

Fra (3) følger ved hjelp av eksistensiell generalisering:

(7) x= f(y;1,...,y;n) & Konj/i,1,n/(V(y;i) & y;i = t;i) –>.
(Ex)(V(x) & x = f(t;1,...,t;n))

Fra (6) og (7) har man så:

(8) Konj/i,1,n/(V(y;i) & y;i = t;i) –>. (Ex)(V(x) & x = f(t;1,...,t;n))

Herav kan man så slutte:

(9) Konj/i,1,n/((Ex)(V(x) & x=t;i)) –> (Ex)(V(x) &x=f(t;1,...,t;n)) **Q.E.D.**

Det bør bemerkes at vi kan bevise et noe sterkere teorem enn Teorem 2.2.3. Det nye teoremet svarer i en viss forstand til det sterke fullstendighetsteoremet for I;0, mens Teorem 2.2.3 svarer til den svake versjonen av fullstendighetsteoremet for I;0 med hensyn på Sem;(I;0)(L). Den sterkere versjonen av Teorem 2.2.3 som vi har i tankene kan formuleres slik:

Teorem 2.2.4 (Intepretasjonsteorem II) Anta L er et I;0-språk. og at T=ß(Δ,I;0,L) er en I;0-teori i L. La Δ;0 være mengden av alle instanser av aksiomene B1 – B14. Sett Δ;1 = e"Δ (Vi har Δ Inkl Fml(L) og derfor at Δ;1 Inkl Fml(@(L))). Da gjelder:

FêT <–> e(F)êß;f(Δ;0UΔ;1, @(L)) for alle FêFml(L)

Vi får Teorem 2.2.3 fra dette teoremet om vi setter Δ=ø.

Bevis:

(A) Kondisjonalen mot høyre bevises ved induksjon på teoremer i systemet I;0. Det er ikke spesielt vanskelig å verifisere at dersom Fêß(Δ,I;0,L) så har man e(F)êß;f(Δ;0UΔ;1, @(L)), og at man dessuten har e(G), e((Ax)F)êC(I;0,@(L)) om man har at e(F) og e(F–>G) er med i C(I;0,@(L)). Man kan bemerke at dersom FêΔ er det lett å se at man har

e(F)êΔ;1 Inkl ß;f(Δ;0UΔ;1, @(L))

Igjen overlater vi den detaljerte verifikasjon av disse påstandene til leseren.

(B) La oss se på beviset for kondisjonalen mot venstre. Anta ¬(FêT). Da er T konsitent. Ved hjelp av kompletthets-teoremet for I;0 finnes det da en modell RêSem;(I;0)(L) som er slik at (1) R := T og (2) ¬(R := F). Fra (1) følger R := ß(Δ,I;0,L) og derfor at (3) R:= Δ. Vi ønsker å vise:

j(R) := ß;f(Δ;0UΔ;1, @(L))

Ved hjelp av Lemma 2.2.2 har man (4) j(R):= ß;f(Δ;0,@(L)) = C(I;0,@(L)).
Vi må vise at j(R) := Δ;1. Anta F'êΔ;1. Da har man, siden Δ;1 = e"Δ at
F' = e(G) for en eller annen formel GêΔ. Vi kan anta at x;1,....,x;n er de variabeltegene som forekommer fri i G og at c;1,...,c;q er de konstantene som forekommer i G. En j(R)-instans av e(G) vil da være av typen:

H = (V(i;1) &...&v(i;n)& Konj/i,1,q/(V(c;i)). –> ¶(G;(x;1,....,x;n)[i;1,...,i;n]))

Vi skal vise at j(R)(H)=1. Anta derfor

j(R)(Konj/s,1,n/(V(i;s)) & Konj/i,1,q/(V(c;i))) = 1

Da har man at i;1,....,i;n er navn på elementer i j(R)(V) = |R| og at c;1,...,c;q er konstanter som har elementer i den samme mengde som referanse. Det følger at G;(x;1,....,x;n) [i;1,...,i;n]êCFml(L(R)). På grunn av (3) og det at GêΔ har vi derfor:

R(G;(x;1,....,x;n)[i;1,...,i;n]) =1

Dette og Lemma 2.2.1 gir oss j(R)(¶(G;(x;1,....,x;n)[i;1,...,i;n])) =1 som er det vi ønsker. Det følger at j(R)(F') =1, og siden F' var et vilkårlig element i Δ;1 har vi j(R):= Δ;1. Dette og (4) impliserer

(5) j(R) := ß;f(Δ;0UΔ;1, @(L))

Fra (2) følger at det finnes navn i;1,....,i;m i L(R) slik at

(6) R(F;(x;1,...,x;m)[i;1,...,i;m]) = 0

i det vi antar at x;1,...,x;m er de fri variablene som forekommer i F. Er videre d;1,..,d;p de konstantene som dukker opp i F har vi at

H' = (V(i;1) &...&v(i;m)& Konj/i,1,p/(V(d;i)). –> ¶(F;(x;1,....,x;m)[i;1,...,i;m]))

er en j(R)-instans av e(F). Men i lys av Lemma 2.2.1 og (6) har vi:

(7) j(R)(¶(F;(x;1,....,x;m)[i;1,...,i;m])) = 0. Vi må imidlertid åpenbart ha at j(R)(Konj/s,1,m/(V(i;s)) & Konj/i,1,q/(V(c;i))) = 1. Det følger at j(R)(H') =0. Herav kan man slutte (8) ¬(j(R):= e(F)). Fra (5), (8) samt gyldighetsteoremet for første-ordens logikk følger at ¬(e(F)êß;f(Δ;0UΔ;1, @(L))). **Q.E.D.**

Man kan nå spørre om hvordan den sterke versjonen av fullstendighetsteoremet for I;0 er relatert til det sterke intepretasjonsteoremet som er nevnt ovenfor. Vi skal i denne forbindelse vise at den sterke versjonen av fullstendighetsteoremet for I;0 følger om vi forutsetter riktigheten av det sterke intepretasjonsteoremet for I;0, dvs. Teorem 2.2.4. Vi skal med andre ord vise det følgende: Anta L er et I;0-språk og at (1) FêFml(L). Anta videre at T= ß(Δ,I;0,L) er en I;0-teori i L og dessuten at (3) F er gyldig i enhver RêSem;(I;0)(L) som er en modell for T, dvs.
(AR)(RêSEm;(I;0)(L) & R:= T .–> R:= F). Vi skal under disse forutsetningene, samt i tillegg under den forutsetning at det sterke intepretasjonsteoremet for I;0 holder, vise at FêT, ie. (Δ,I;0,L) :– F.

For å kunne gjøre dette finner vi det imidlertid hensiktsmessig å innføre endel hjelpebegreper og bevise en del hjelpesetninger. Dette vil bli gjort i den neste paragrafen.

§3 Relasjonen mellom det sterke intepretasjonsteoremet for I:0 og den sterke versjonen av fullstendighetsteoremet for I:0.

Vi skal nå gå næremere inn på de forhold som ble nevnt avslutningsvis i den foregående paragrafen. Vi skal vise at det sterke intepretasjonsteoremet for I;0 impliserer det sterke fullstendighetsteoremet for I;0 med hensyn på Sem;(I;0)(L).

I dette beviset vil vi forutsette og benytte det sterke fullstendighetsteoremet for første-ordens teorier. Imidlertid er det på sin plass å foreta en del forberedelser. Det viktigste i denne forbindelse er at vi definerer en avbildning ç fra klassen av første-ordens modeller for @(L) som er modeller for ß;f(Δ;0,@(L)) inn i klassen av seminormale I;0-modeller for L. Det tar noe tid og plass å gjøre dette i detalj samt vise at avbildningen har de egenskaper vi ønsker. I denne sammenheng viser det seg også formålstjenlig å gi bevis for en del hjelpesetninger.

§3.1 Konstruksjon av avbildningen ç.

Anta RêFMod(@(L)) i det vi selvfølgelig forutsetter at L er et I;0-språk. Anta videre at R := ß;f(Δ;0,@(L)). Vi skal definere en modell ç(R) som er med i Sem;(I;0)(L). (Vi gjør oppmerksom på at vi av og til vil skrive "R;ç" i stedet for "ç(R)"). Først definerer vi en modellstruktur

M;ç = < *,D, f, £, <*f*;<m,n>>/<m,n>êNXN, G;0>

Dette gjør vi ved å sette (1) * = *(R). Videre lar vi (2) D= R(V).

Vi innfører en mengde med konstanter som er likemektig med D og kaller denne C. L;C er språket som er nøyaktig som L unntatt ved at vi har ertattet mengden med konstanter i L med konstantene i C. Vi velger ut en vilkårlig korrelasjon p mellom D og C og setter (3) f = p.

Vi definerer en avbildning H;2 med CFml(L;C) som domene og med verdiområdet inkludert i D: Anta FêCFml(L;C). Da finnes n≥0 slik at Grad(«F»)=n og slik at F = «F»[c;1,...,c;n] der c;1,...,c;n er visse konstanter i L;C. Vi setter i så fall:

(4) H;2(F) = R(G)(R(¥(«F»))(p;-1(c;1),....,p;-1(c;n)))

Det er mulig å vise at H;2 er en-entydig siden vi har R := ß;f(Δ;0,@(L)). Vi må også ha:

(5) Rgn(H;2) Inkl R(U).

Vi betrakter nå u = R(U) – Rgn(H;2). For hvert xêu innfører vi et nytt monadisk predikat Pr;x og utvider L;C til L2;C ved å føye til alle disse nye ikke-logiske predikatene. Man har:

(6) Cd(CFml(L2;C) – CFml(L;C)) ≥ Cd(u).

Det finnes derfor en funksjon H+ som har CFml(L2;C) – CFml(L;C) som domene og h som verdiområde. Vi definerer:

(7) G0 = H;2UH+.

Det gjenstår å definere de forskjellige operatorfunksjonene f;<m,n> for <m,n>êNXN. Vi setter:

f;<m,n>(x;1,....,x;m> = Mg(y: (Ez)(<x;1,...,x;n,z>êR(t;<m,n>) & yêG0;-1"({z}).

Dette avslutter definisjonen av modellstrukturen M;ç.

Vi definerer en L-morfi g;ç fra L over i L2;C ved å la g;ç(u) =u om u er et predikat, et funksjonssymbol eller en singulær term i snever forstand i L. Er eêConst(L) lar vi g;ç(e) = p(R(e)).

Tilslutt lar vi ∏;ç være en valuasjon som er fiksert på den følgende måte:

(a) ∏;ç(P) = R(P) om P er et n-ært predikat i L (n≥1).
(b) ∏;c(f) = Rest(R(f), R(V)^n) om f er et n-ært funksjonssymbol i L
(c) ∏;ç(t) = R(t) om t er en singulær term i snever forstand
(d) ∏;ç(e) = R(e) om e er en konstant i L

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av modellen R;ç = <M;ç,g;ç,∏;ç> gitt at vi har for oss en modell RêFMod(@(L)) der L er et I;0-språk.

Det gjenstår nå å vise at R;ç faktisk er en seminormal I;0-modell. Vi må f.eks. vise at (5) ovenfor holder. Dette skulle det imidlertid ikke være så vanskelig å vise når man husker på at R := ß;f(Δ;0,@(L)).

Vi kan bevise:

Lemma 3.1.1 Anta RêFMod(@(L)) og at R := ß;f(Δ;0,@(L)). Anta L er et I;0-språk. Anta videre at FêCfml(L(R;ç)) og at têCTerm(L(R;ç)). Da gjelder:

(i) R(¶(F)) = j(R;ç)(¶(F))
(ii) R(¶(t)) = j(R;ç)(¶(t))

I stedet for direkte å bevise denne satsen er det hensiktsmessig å bevise to andre satser først.

Lemma 3.1.2 Anta RêFMod(@(L)) og at R := ß;f(Δ;0,@(L)). Anta L er et I;0-språk. Anta videre at FêCfml(L(R;ç)) og at têCTerm(L(R;ç)). Da gjelder:

(i) R;ç(¶(F)) = R(¶(F))
(ii) R;ç(¶(t)) = R(¶(t))

Beviset for denne hjelpesetningen er ved induksjon på lengden av de velformede uttrykkene i L(R;ç). Siden dette induksjonsbeviset er av en rutinemessig karakter overlates det til leseren.

Vi har også bruk for den følgende sats:

Lemma 3.1.3 Anta L er et I;0-språk og at RêFMod(@(L)). Anta videre at R:= ß;f(Δ;0,@(L)). Da har man:

R;ç êSem;(I;0)(L)

Beviset for denne påstanden er ikke spesielt vanskelig. I hovedtrekkene vil vi føre det nedenfor. Som man ser er imidlertid Lemma 3.1.1 en umiddelbar konsekvens av Lemma 2.2.1, Lemma 3.1.2 og Lemma 3.1.3.

La oss nå se på en del viktige punkter i beviset for Lemma 3.1.3. Vi ønsker å vise at R:ç er en

seminormal I;0-modell under de forutsetningene som er gitt i satsen.

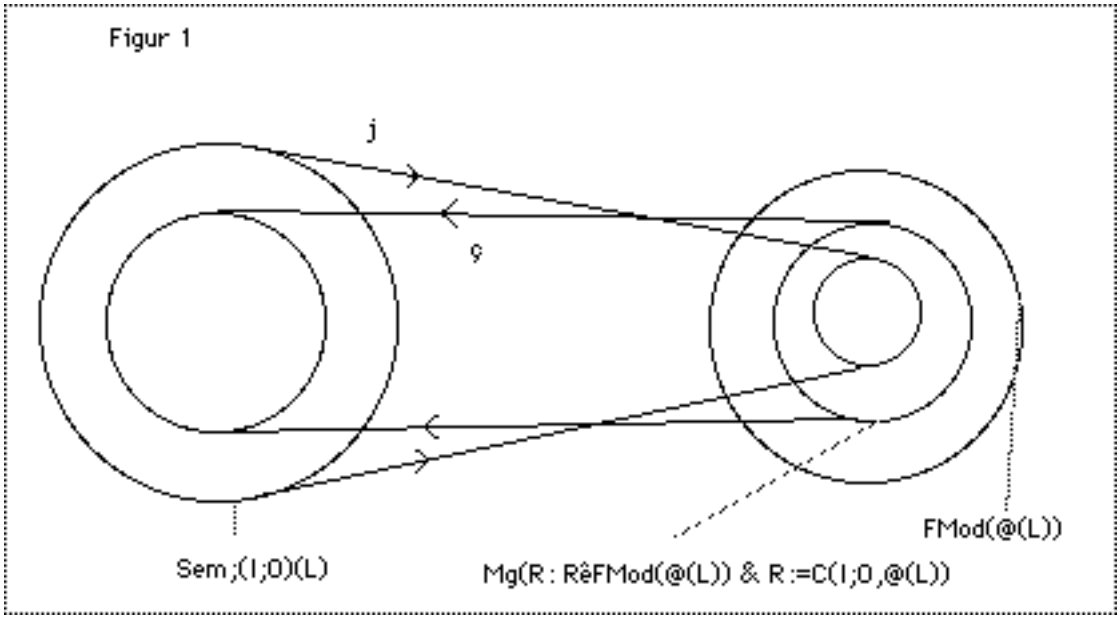
(A) Vi må bevise: ∏(R;ç)(t;<m,n>) =
Mg(<x;1,...,x;m,y>: yêG0"*f*;<m,n>(x;1,...,x;m))
Anta (1) <x;1,...,x;m,y>ê∏(R;ç)(t;<m,n>). Da har vi yêR;ç(U) og derfor yêRgn(G0). Da finnes FêCFml(L2;C) slik at G0(F)=y. Dette innebærer sammen med (1) og definisjonen av *f* at Fê*f*;<m,n>(x;1,...,x;m). Vi må derfor ha at yêG0"*f*;<m,n>(x;1,...,x;m)).

Anta på den annen side at yêG0"*f*;<m,n>(x;1,...,x;m)). Det følger da at det finnes z slik at y=G0(z) & zê*f*;<m,n>(x;1,...,x;m). Den siste konjunkten impliserer i lys av konstruksjonen av *f* at det finnes w slik at

<x;1,...,x;m,w>êR(t;<m,n>) & zêG0;-1"({w}).

Herav har man G0(z) = w. Vi har derfor w=y og følgelig at <x;1,...,x;m,y>êR(t;<m,n>). Siden R;ç(t;<m,n>) = R(t;<m,n>) i lys av konstruksjonen av R;ç følger <x;1,...,x;m,y>êR(t;<m,n>). Dette er hva vi ønsker og viser at ∏(R;ç)(t;<m,n>) er veldefinert.

Fra konstruksjonen av G0 og L2;C er det opplagt at R;ç(U) = Rgn(G0). Dette viser at R;ç(U) er veldefinert.



(B) Vi må være nøyaktige når det gjelder et bestemt punkt. Vi har nå definert R;ç, men vi er ikke forsikret om at R;ç êSem;(I;0)(L) før vi har vist:

(+) X;(R;ç,L)Ω *f*;<m,n>(R;ç)(x;1,...,x;m) Inkl Tr;L(R;ç)

der x;1,...,x;mê|R;ç| og <m,n>êh, dvs. at <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. Anta derfor (1) FêX;(R;ç,L)Ω *f*;<m,n>(R;ç)(x;1,...,x;m). Da har vi at det finnes GêCFml(L(R;ç)) slik at

(2) F = g;ç(G) & Fê*f*;<m,n>(R;ç)(x;1,...,x;m). Videre må man da ha ikraft av definisjonen av *f*;<m,n>(R;ç) at

FêG(R;ç);-1"{z} & <x;1,...,x;m,z>êR;ç(t;<m,n>) for noe z. Dette innebærer:

(3) G0(F) =z & <x;1,...,x;m,z>êR;ç(t;<m,n>)

Siden FêX;(R;ç,L) følger fra (3) og definisjonen av G0 at

(4) H2(F) =z & <x;1,...,x;m,z>êR;ç(t;<m,n>)

Vi kan anta at det finnes c;1,....,c;n slik at F = «F»[c;1,...,c;n] for noe n≥1 og at Grad(F)=n. Fra (4) følger om i;1,...,i;n er navnene på p;-1(c;1),...,p;-1(c;n) at
z = R(G)(R(¥(«F»)(i;1,...,i;n))). Jmf. i denne forbindelse definisjonen av H2. Derfor har man

R(G(¥(«F»)(i;1,...,i;n))) = z. Dette og (4) gir oss, om j;1,...,j;m er navnene på x;1,...,x;m:

R(t;<m,n>(j;1,...,j;m, G(¥(«F»)(i;1,...,i;n)))) = 1

I kraft av at R er en modell for C(I;0,@(L)) følger i lys av B1 at

R(J;<m,n>(j;1,...,j;m, G(¥(«F»)(i;1,...,i;n)))) = 1 og derfor, siden R er en modell for aksiomet B11a at R(¶(«F»[i;1,...,i;n])) = 1. Ved hjelp av Lemma 3.1.1 har vi da j(R;ç)(¶(«F»[i;1,...,i;n])) = 1 og derfor ved hjelp av Lemma 2.2.1 at

(5) R;ç(«F»[i;1,...,i;n]) =1. Nå har vi

(6) g;ç(«F»[i;1,...,i;n]) = «F»[c;1,...,c;n]

(5) og (6) impliserer ved hjelp av definisjonen av Tr:L(R;ç) at

F = «F»[c;1,...,c;n]êTr;L(R;ç). Dette er hva vi ønsker og avslutter dermed beviset for (+).

(C) Det er ikraft av det faktum at R:= C(I;0,@(L)) og derfor at R:= B1 &...&B5 at vi kan slutte at H2 er en-entydig og derfor at G0 har de egenskapene som er nødvendige for at R;çêSem;(I;0)(L). Videre er det i kraft av det forhold at R:= B6 &...&B14 at vi kan slutte at ∏(R;ç) er veldefinert.

(D) Vi må vise ar R;ç(f) er en funksjon med D^n som domene og med verdiområdet inkludert i D om f er et n-ært funksjonssymbol i L. Dette holder faktisk fordi vi har R:= B6. Det er klart i lys av konstruksjonen av ç at

Dom(R;ç(f)) Inkl D^n = R(V)^n

Vi må imidlertid også vise at dersom x;1,...,x;nê|R;ç| = D = R(V) så har man også at R:ç(f)(x;1,...,x;n)êD, dvs. at Rest(R(f), R(V)^n)(x;1,...,x;n)êR(V).

Anta derfor x;1,....,x;nêR(V). Da har man

Rest(R(f), R(V)^n)(x;1,...,x;n) = R(f)(x;1,...,x;n) = R(f(i;1,...,i;n)) om vi antar at i;1,...,i;n er navnene på x;1,...,x;n. Videre har man R(V(i;1)) = ... R(V(i;n))=1. Siden R := B6 følger R(V(f(i;1,...,i;n))) = 1. Dette innebærer at R(f(i;1,...,i;n))êR(V) som er det vi ønsker.

(E) Vi må også bevise at R;ç(P) Inkl |R;ç|^n om P er et n-ært predikat i L. Dette følger greit fordi R := B7. Anta nemlig at <x;1,...,x;n>êR;ç(P) for et eller annet n-ært predikat P. Da har vi per definisjon at <x;1,...,x;n>êR(P). Er i;1,...,i;n navnene på henholdsvis x;1,...,x;n i modellen R har vi da R(P(i;1,...,i;n)) =1. Siden R:= B7 følger da R(Konj/s,1,n/(V(i;s))) =1. Dette innebærer at x;sêR(V) for s=1,...,n. Men herav har vi i kraft av definisjonen av R;ç at x;sê|R;ç| og derfor at <x;1,...,x;n>ê|R;ç|^n.

På samme måte er det lett å innse at R;ç(U) Inkl |R;c| og at R;ç(t;<m,n>) er inkludert i |R;ç|^(m+1) for alle <m,n>êNXN. Det er heller ikke vanskelig å innse i lys av forutsetningen R := C(I;0,@(L)) at

<x;1,...,x;n,y>êR;ç(t;<m,n>) –> yêR;ç(U). Disse forhold holder fordi vi forutsetter at R := B2 & B8 & B10. Siden R := B14 er det lett å innse at R;ç(e) ê|R;ç| og at R;ç(b)ê |R;ç|U{*} om e og b henholdvis er en konstant i L og en singulær term i snever forstand i L. Vi må naturligvis være forsikret på alle disse punktene for å kunne konkludere med at R;ç er en seminormal I;0-modell og dessuten for å kunne være sikre på at ∏;ç faktisk er en valuasjon.

§4 En tese om ekvivalens.

Vi har i forrige paragraf vist hvordan man gitt en første-ordens modell R for @(L) der L er et I;0-språk kan konstruere en seminormal I;0-modell R;ç gitt at R er en modell for første-ordens

teorien C(I;0,@(L)). Det er nå på tide å ta opp igjen det temaet som ble nevnt innledningsvis i §3.

Med "det sterke fullstendighetsteoremet for I;0" mener vi den følgende påstand:

Komp1 Anta L er et I;0-språk og at T = ß(Δ,I;0,L) er en I;0-teori i L. Anta FêFml(L) og at vi har: (AR)(RêSem;(I;0)(L) & R:= T –> R:=F). Da gjelder FêT.

Det er lett å vise at denne påstanden er ekvivalent med den følgende påstand:

Komp2 Anta L er et I;0-språk og at T = ß(Δ,I;0,L) er en konsistent I;0-teori i L. Da gjelder (ER)(RêSem;(I;0)(L) & R := T)

Vi skal nå gi et bevis for den følgende tese

Tese om ekvivalens. Den sterke versjonen av intepretasjonsteoremet for I;0 er ekvivalent med det sterke fullstendighetsteoremet for I;0, dvs. Komp1.

Bevis: Anta (1) FêFml(L) og at (2) T =ß(Δ,I;0,L) er en I;0-teori i L. Vi forutsetter selvfølgelig at L er et I;0-språk. Anta dessuten at

(3) (AR)(RêSem;(I;0)(L) & R:= T . –> R:= F)

Forutsett tilslutt at den sterke versjonen av intepretasjonsteoremet for I;0 holder. Vi ønsker å vise at FêT gitt disse forutsetningene. Anta for reduktio ad absurdum at ¬(FêT). Ved hjelp av den sterke versjonen av intepretasjons-teoremet, Teorem 2.2.4, har vi da:

(4) ¬(e(F)êß;f(Δ;0UΔ;1,@(L)))

La nå R være en vilkårlig modell som oppfyller de følgende to krav:

(5) RêFMod(@(L))

(6) R := ß;f(Δ;0UΔ;1,@(L))

Vi ønsker å vise at R:= e(F). I så fall har vi generelt at:

(AR)(RêFMod(@(L)) & R := ß;f(Δ;0UΔ;1,@(L)) –> R:=e(F))

Fra dette og fullstendighetsteoremet for første-ordens logikk følger da e(F)êß;f(Δ;0UΔ;1,@(L)). Men dette strider mot (4). Det vil altså være tilstrekkelig å bevise R := e(F) gitt at R er et vilkårlig objekt som oppfyller kravene (5) og (6).

Fra (6) følger (7) R := ß;f(Δ:0, @(L)). Dette er ekvivalent med (7.1) R := C(I;0,@(L)). Videre følger fra (6) at (8) R:= Δ;1. Fra (7) følger ved hjelp av (5) og Lemma 3.1.3 at (9) R;çêSem;(I;0)(L). Vi ønsker å vise at R;ç:= Δ. Anta derfor at G er en vilkårlig formel der GêΔ. La x;1,...,x;n være de variablene som forekommer fri i G. En R;ç-instans av G vil da se slik ut:

G' = G;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n] der i;1,....,i;n er navn i L(R;ç). Ved hjelp av Lemma 3.1.3 må vi da ha: (10) R(¶(G')) = j(R;ç)(¶(G'). Nå har man

(11) e(G) = (V(x;1)&....&V(x;n)& Konj/j,1,q/(V(c;j)) –> ¶(G))

der c;1,...,c;q er de konstantene som forekommer i G. Vi må ha e(G)êΔ;1 og derfor i lys av (7.1) at R:= e(G). Dette innebærer at

R(V(i;1)&....&V(i;n)& Konj/j,1,q/(V(c;j)) –> ¶(G;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]))=1

Men dette impliserer, siden i;1,...,i;n er navn i L(R;ç) at

R(¶(G);(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]) = 1

Fra dette følger ved hjelp av Lemma 2.1.1 at (12) R(¶(G')) = 1. Dette og (10) impliserer j(R;ç)(¶(G')) =1 som i lys av Lemma 3.1.1 gir oss R;ç(G') =1. Men G' var en vilkårlig R;ç-instans av G. Derfor R;ç:= G. Men G var i sin tur et vilkårlig element i Δ. Det følger at (13) R;ç := Δ. (3), (9) og (13) impliserer (14) R;ç :=F.

Vi behøver nå bare å bevise R := e(F) for å være ferdige. Vi kan anta at x;1,...,x;n er de variablene som forekommer fri i F og d;1,...,d;p er de konstantene som forekommer. (n≥0, p≥0). En R-instans av e(F) vil da være av typen:

H = (V(i;1)&...&V(i;n) &Konj/s,1,p/(V(d;s)) –> ¶(F;(x;1,..,x;n)[i;1,...,i;n]))

er i;1,...,i;n er navn i @(L). Vi skal vise at R(H) = 1. Anta derfor:

R(V(i;1)&...&V(i;n) &Konj/s,1,p/(V(d;s))) =1. Da er i;1,...,i;n navn på elementer i R(V) = |R;ç| og d;1,...,d;p har også elementer i denne mengden som sin referanse. Dette innebærer at (15) F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]êCFml(L(R;ç)). Ved hjelp av (14) har vi derfor

(16) R;ç(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]) =1. Men (15), (16), Lemma 2.2.1 og det faktum at R;çêSem;(I;0)(L) impliserer j(R;ç)(¶(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n])) =1. Dette i sin tur impliserer ved hjelp av Lemma 3.1.1 at R(¶(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n])) =1. Men dette er hva vi ønsker. Vi har med andre ord at R := e(F).

Dette avslutter dermed beviset for påstanden. **Q.E.D.**

Vi har bevist Teorem 2.2.4 ved å bruke den sterke versjonen av fullstendighetsteoremet for I;0. Tesen ovenfor viser at dersom vi kan finne et bevis for intepretasjonsteoremet, Teorem 2.2.4, som ikke benytter fullstendighetsteoremet for I;0 så vil vi med andre ord ha et alternativt bevis for fullstendighetsteoremet til I;0. Imidlertid har vi ikke greid å finne noe slikt bevis. Hovedformålet med bemerkningene ovenfor er imidlertid ikke å finne noe nytt bevis for fullstendighetsteoremet, men å utdype sammenhengene mellom de to typene av teoremer. Man ser at intepretasjonsteoremet i det vesentlige sier det samme som kompletthets-teoremet.

§5 Språket fl(L)

Vi skal nå gitt et I;0-språk L definere et bestemt korrelert første-ordens språk som vi vil betegne med "fl(L)". Man kan oppfatte fl som en operasjon som avbilder klassen av I;0-språk inn i klassen av første-ordens språk. Det er sterke likhetspunkter mellom @(L) og fl(L) når L er et I;0-språk. Saken er imidlertid at de intensjonale operatorene i L ikke inngår på samme måte i fl(L) om i @(L).

Språket fl(L) gitt at L er et I;0-språk er definert ved de følgende punkter:

Vi definerer en sekvens av språk <L;n>/nêN/ slik:

(1) Vi setter at L;0 er språket L minus alle de intensjonale operatorene av typen T;<m,n>

(2) L;1 er L;0 utvidet med predikatene J;<m,n> for alle <m,n>êNXN, predikatet V og fuksjonssymbolet G, samt alle spesielle funksjonsymboler på nivå 0, dvs. alle funksjonsymboler av typen ¥(«F») der FêFml(L;0).

(3) L;(n+1) er L;n utvidet med alle spesielle funksjonssymboler på nivå n. Anta FêFml(L;n) (n≥1) og at F inneholder minst et spesielt funksjonssymbol på nivå n–1. Da er ¥(«F») et funksjonsymbol på nivå n.

(4) Vi setter fl(L) = UN/n,1,∞/(L;n)

Man kan oppfatte fl som en operasjon som tilordner ethvert I;0-språk L et bestemt første-ordens språk fl(L). Variabeltegnene er de samme i L og fl(L). Det bør også noteres at de intensjonale predikatkonstantene t;<m,n> for <m,n>êNXN, og predikatkonstanten U er med i fl(L) om L er et I;0-språk. Anta FêFml(fl(L)). Da er ¥(«F») et funksjonsymbol i fl(L). Den intenderte intepretasjon av dette er en funksjon som tilordner ethvert n-tuple av individer <x;1,...,x;n> et n+1'tuple <«F»,x;1,...,x;n> . Vi forutsetter at graden til matrisen «F» er n. Vi

kaller tupler av typen <«F»,x;1,...,x;n> der Grad («F»)=n (n≥0) for n-ære komplekser. En setning av typen y = G(¥(«F»)(i;1,....,i;n)) i fl(L) der i;1,...,i;n er navn på elementene x;1,..,x;n uttrykker derfor at y er identisk med den intensjonen som er representert ved det n-ære komplekset <«F»,x;1,...,x;n>.

Språket fl(L) er av en noe annen karakter en @(L). Det er i en viss forstand ikke "parasittisk" på L på samme måte som L*. Man kan konstruere enhver formel i fl(L) uten å trekke inn de intensjonaleoperatorene i L. La oss også på dette punkt bemerke at vi krever at funksjonen ¥ skal være en-entydig. Er ¥(«F») = ¥(«G») kreves det at «F» = «G».

La L være et I;0-språk. Vi definerer en avbildning ∂ som avbilder de velformede uttrykkene i L på velformede uttrykk i fl(L). Dette skjer induktivt på lengden av de velformede uttrykkene i L:

Definisjon 5.1 Med ∂-intepretasjonen av L inn i fl(L), der L er et I;0-språk, forstås funksjonen ∂ som er definert induktivt på lengden av de velformede uttrykkene i L på den følgende måte:

(1) ∂(x) = x om x er et variabeltegn i L
(2) ∂(e) = e om eêConst(L)
(3) ∂(t) = t om t er en singulær term i snever forstand i L
(4) ∂((ix)F) = (ix)(V(x) & ∂(F)) forutsatt at FêFml(L) og x er et variabeltegn i L.
(5) ∂(μ(F)) = G(¥(«∂(F)»)(a;1,....,a;n)) forutsatt at ∂(F) = «∂(F)»[a;1,...,a;n] og vi antar at FêFml(L) og a;1,...,a;n er de variabeltegn og konstanter som forekommer i F og at Grad(∂(F)) = n
(6) ∂(f(t;1,...,t;n)) = f(∂(t;1),....,∂(t;n)) om f er et funkjonsymbol i L og t;1,..,t;n er termer i L.
(7) ∂(¬F) = ¬∂(F) om FêFml(L)
(8) ∂(F–>G) = ∂(F) –> ∂(G) om F,GêFml(L)
(9) ∂(P(t;1,...,t;n)) = P(∂(t;1),....,∂(t;n)) om P er et n-ært predikat i L og t;1,...,t;n er termer i L.
(10) ∂((Ax)F) = (Ax)(V(x) –> ∂(F)) forutsatt at F er en formel i L og x et variabeltegn i L.
(11) ∂(T;<m,n>(t;1,...,t;n,F)) = J;<m,n>(∂(t;1),...,∂(t;n), ¥(«∂(F)»)(a;1,...,a;n)) forutsatt at ∂(F) = «∂(F)»(a;1,....,a;n) og at t;1,...,t;n er termer i L.

Som man ser er definisjonen av ∂ nøyaktig som definisjonen av avbildningen ¶. De to definisjonene avviker bare fra hverandre når det gjelder klausulene (5) og (11).

I tilknytning til definisjonen ovenfor innfører vi også operasjonen e1 som er definert slik:

Definisjon 5.2 La L være et I;0-språk og anta FêFml(L). La x;1,...,x;n være de variablene som forekommer fri i F og la c;1,...,c;q være de konstantene som forekommer i F. Da setter vi:

e1(F) = [Konj/i,1,n/(V(x;i)) & Konj/j,1,q/(V(c;j)) –> ∂(F)]

I forbindelse med språket @(L) betraktet vi aksiomskjemaene B1 – B14. Vi beholder nå disse bortsett fra B11 som vi endrer til:

B11 (a) t;<m,n>(x;1,...,x;m,G(¥(«∂(F)»)(a;1,...,a;n))) –> e1(F) forutsatt at

<m,n>êh og FêFml (L). (n≥0)

(b) J;<m,n>(x;1,....,x;m,¥(«∂(F)»)(a;1,...,a;n)) –> e1(F) forutsatt at <m,n>êh og FêFml (L). (n≥0)

Vi lar Δ;0 være mengden av alle de fomler i fl(L) som er instanser av aksiom-skjemaene B1 – B14 slik disse er definert nå.

Et intepretasjonsteorem som er analogt med det vi tidligere har nevnt lar seg nå formulere slik:

Teorem 5.3 Anta L er et I;0-språk. Da gjelder for alle FêFml(L) at

FêTh(I;0,L) <–> e1(F) êß;f(Δ;0, fl(L))

Denne satsen er analog med Teorem 2.2.3 i §2.2. Vi nevner også den følgende sterkere versjon av dette teoremet:

Teorem 5.4 Anta L er et I;0-språk og at T = ß(Δ,I;0,L) er en I;0-teori i L. Sett per definisjon Δ;1 = e1"Δ. Da gjelder for alle FêFml(L) at

FêT <–> e1(F)êß;f(Δ;0UΔ;1, fl(L))

Som man ser er denne satsen heltanalog med Teorem 2.2.4.

Teorien ß;f(Δ;0,fl(L)) må ikke forveksles med teorien ß;f(Δ;0,@(L)). Formodentlig er den første teorien i en eller annen forstand sterkere enn den siste. Det burde være mulig å finne en troverdig intepretasjon av ß;f(Δ;0,@(L)) inn i ß;f(Δ;0,fl(L)), mens det ikke finnes noen den andre veien. Siden vi ikke har foretatt noen nøyere undersøkelser i denne forbindelse må disse bemerkningene tas med alle mulige forbehold. Det ville i alle tilfelle være interessant å vite mer om forholdet mellom disse to teoriene.

Vi skal nå etterhvert gi et bevis for Teorem 5.4. For å kunne vise at denne satsen holder finner vi det imidlertid nødvendig å modifisere hele modell-teorien for system I;0 slik denne teorien er fremstilt i Rognes [1]. Dette innebærer at vi nå definerer en ny type av I;0-modeller, vi skal kalle dem neo-I;0-modeller. Vi beviser så et nytt kompletthetsresultat og kan så bruke dette. Det er beviset for dette nye kompletthetsresultatet som gjør beviset for Teorem 5.4 såpass langt.

§6 Grunntrekkene i en modifisert versjon av modellteorien for I:0-språk.

Vi skal nå angi mer presist grunnbegrepene i den modifisere versjonen av modellteorien for I;0-språk. Anta L;1 og L;2 er to I;0-språk. Vi definerer da hva som menes med at L;2 er et språk for L;1 på akkurat samme måte som i Rognes [1]. Vi definerer nå begrepet fl-morfi fra L;1 over i fl(L;2) der L;1 og L;2 er I;0-språk:

Definisjon 6.1 Anta L;1, L;2 er I;0-språk og at L;2 er et språk for L;1. Med en F-morfi fra L;1 over i fl(L;2) forstår vi en funksjon ¢ som oppfyller de følgende krav: (i) ¢ avbilder Pred;(L;1) en-entydig inn i Pred;n(L;2) for alle n≥1.
(ii) ¢ avbilder Funk;n(L;1) en-entydig inn i Funk;n(L;2) for alle n≥1. (iii) ¢ avbilder SingTerm(L;1) en-entydig inn i SingTerm(L;2). (iv) Man har at ¢"Const(L;1) Inkl Const(L;2). Videre er ¢ definert over mengden av velformede uttrykk i L;1 på den følgende måte:

(1) ¢(e)êConst(L;2)

(2) ¢(P(t;1,...,t;n)) = ¢(P)(¢(t;1),...,¢(t;n))

(3) $\phi(\neg F) = \neg\phi(F)$
(4) $\phi(F \rightarrow G) = \phi(F) \rightarrow \phi(G)$
(5) $\phi((Ax)F) = (Ax)(V(x) \rightarrow \phi(F))$
(6) $\phi(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F)) = J;<m,n>(\phi(t;1),...,\phi(t;m),¥(«\phi(F)»)[a;1,...,a;n])$
(7) $\phi(\mu(F)) = G(¥(«\phi(F)»)[a;1,...,a;n])$
(8) $\phi(f(t;1,....,t;n)) = \phi(f)(\phi(t;1),...,\phi(t;n))$
(9) $\phi((ix)F) = (ix)(V(x) \& \phi(F))$

I klausul (6) og (7) forutsettes det at $\phi(F) = «\phi(F)»[a;1,....,a;n]$ og at Grad($«\phi(F)»$)= n≥0.

Gitt denne definisjonen av hva som menes med en F-morfi kan vi gå videre å definere hva vi nå forstår med en I;0-modellstruktur:

Definisjon 6.2 En struktur <*,D,f,fl(L;1), <*f*;<m,n>/<m,n>êNxN/,G> er en I;0-modellstruktur for L hvis og bare hvis den oppfyller de følgende krav:

(1) D er en ikke-tom mengde
(2) L;1 er et I;0-språk for L
(3) *f*;<m,n> : D^m –> Mg(x: x Inkl CFml(fl(L;1)) for alle <m,n>êNxN
(4) G: CFml(fl(L;1)) –> D
(5) ¬(*êD)
(6) f er en en-entydig funksjon med mengden D som domene og der verdiområdet er Const(fl(L;1)). Man har med andre ord:
f : D–(1-1,på)–> Const(fl(L;1)).

Vi kan så definere hva som menes med en modell R for L:

Definisjon 6.3 Med en modell R for L, der L er et I;0-språk, forstår vi et trippel R = <M, ϕ,∏> der
M = <*,D,f,fl(L;1), <*f*;<m,n>/<m,n>êNxN/,G>
er en modellstruktur for L, ϕ en F-morfi fra L(D) over i fl(L;1) og ∏ en valuasjon assosiert med M og ϕ. Denne er definert som i Rognes [1], Kapittel II, §3.1, bortsett fra at vi i denne definisjonen erstatter alle forekomster av L-morfien g med ϕ. Skrevet helt ut blir definisjonen denne:

(i) ϕ er en L-morfi fra L(D) over i fl(L;1) der man krever at:
(1) ϕ(i)= f(n;-1(i)) for ethvert navn i i L(D)

(ii) ∏ er en funksjon som oppfyller de følgende krav:
(1) ∏(i) =n;-1(i) om i er et navn i L(D)
(2) ∏(e) = f;-1(g(e)) om e er en konstant i L(D)
(3) ∏(a) êDU{*} om a er en singulær term i L(D)
(4) ∏(μ(F)) = G(ϕ(F)) om FêCFml(L(D))
(5) ∏(P) Inkl D^n om P er et n-ært predikat i L(D). (n≥1)
(6) ∏(f) er en funksjon fra D^n over i D om f er et n-ært funksjonssymbol i L(D)
(7) ∏(=) = Mg(<x,y>: x,yêD & x=y)
(8) ∏(t;<m,n>) = Mg(<x;1,...,x;m,y>: yêG"(*f*;<m,n>(x;1,...,x;m)) & x;1,...,x;m,yêD)
forutsatt at <m,n>êNXN
(9) ∏(U) = Rgn(G)

(iii) ∏ er en funksjon som tilordner sannhetsverdier, enten 1 eller 0, til de lukkede formlene i L(D) og elementer i {*}UD til de lukkede termene i L som ikke allerede er

tilordnet en referanse. Dette skjer ved simultan induksjon på termer og formler i L(D) etter de følgende regler:

(10) Er P et n-ært predikat i L(D) og t;1,..,t;n lukkede termer i L(D) har man:

$\prod(P(t;1,..,t;n))=1 \leftrightarrow \langle\prod(t;1),...,\prod(t;n)\rangle \hat{e} \prod(P)$

(11) Er FêCFml(L(D)) har man:

$\prod(\neg F) =1 \leftrightarrow \prod(F)=0$

(12) Er F,GêCFml(L(D)) har man:

$\prod(F \rightarrow G) =1 \leftrightarrow (\prod(F)=1 \rightarrow \prod(G)=1)$

(13) Er FêCFml(L(D) har man:

$\prod(Ax)F)=1 \leftrightarrow (Ar)(r\hat{e}D \rightarrow \prod(F;x[n(r)]) = 1)$

Dette innebærer at $\prod(Ax)F)=1$ hvis og bare hvis $\prod(F;x[i]) = 1$ for alle navn i som foreligger i L(D).

(14) Er t;1,...,t;m lukkede termer i L(D) og F êCFml(L(D)) har man:

$\prod(T;\langle m,n\rangle(t;1,...,t;m,F)) \leftrightarrow \not\in(F)\hat{e}f;\langle m,n\rangle(\prod(t;1),....,\prod(t;m))$

Det forutsettes her at $\langle m,n\rangle \hat{e} NXN$

(15) $\prod((ix)F) =a$ om det finnes et og bare et objekt bêD slik at $\prod(F;x[n(b)])=1$ og dette objektet b er identisk med a, ellers er $\prod((ix)F) =*$.

(16) Er f et n-ært funksjonssymbol i L(D) og t;1,...,t;n lukkede termer har man:

$\prod(f(t;1,...,t;n)) = \prod(f)(\prod(t;1),....,\prod(t;n))$ forutsatt at $\prod(t;i)\hat{e}D$ for i = 1,...,n. Ellers er $\prod(f(t;1,...,t;n)) =*$

Dette avslutter definisjonen.

Vi definerer "X;(fl,R,L)" og "Tr;(fl,R,L)" ved den følgende definisjon:

Definisjon 6.4 Vi setter om R er en modell for L:

(i) $X;(fl,R,L) = \not\in"(CFml(L(R)))$

(ii) $Tr;(fl,R,L) = \not\in"(CFml(L(R)) \Omega Mg(F: R(F) =1))$

Klassen av de F-seminormale I;0-modellene for L introduseres ved den følgende definisjon:

Definisjon 6.5 Mengden av alle de modeller R for L som oppfyller de følgende krav kalles for mengden av de F-seminormale I;0-modellene for L, i symboler "F-Sem;(I;0)(L):

(1) Rest(G(R), $\not\in$"CFml(L(R)) er en korrelasjon

(2) $G(R)"X;(fl,R,L) \Omega G(R)"(CFml(fl(L)(R)) - X;(fl,R,L) =\emptyset$

(3) $f;\langle m,n\rangle(R)(x;1,...,x;m)\Omega X;(fl,R,L)$ Inkl Tr;(fl,R,L) om $\langle m,n\rangle$ er indeksen til en streng intensjonal operator i L.

La oss bemerke følgende: Anta L er et I;0-språk og at $\not\in$ er en F-morfi fra L inn i fl(L). Da gjelder det at $\not\in"Fml(L)$ SInkl Fml(fl(L)). Man kan altså i dette tilfelle ikke ha $\not\in"Fml(L) = Fml(fl(L))$.

Vi trenger de følgende hjelpesetningene:

Lemma 6.1 Anta $\not\in$ er en F-morfi fra L;1 over i fl(L;2) der L;2 og L;1 er I;0-språk og L;2 er et språk for L;1. Under disse forutsetningene gjelder:

(a) Er F,GêCFml(L;1) og $\not\in(F) = \not\in(G)$ finnes en formel H i L;1 og konstanter c;1,...,c;n, c°;1,...,c°;n der vi har:

(i) $H;(x;1,...,x;n)[c;1,...,c;n] = F$

(ii) H;(x;1,...,x;n)[c°;1,...,c°;n] = G
(iii) ¢(c;i) = ¢(c°;i) for i = 1,...,n (n≥0)

(b) Er t;1,t;2êCTerm(L;1) og ¢(t;1) = ¢(t;2) finnes en term t i L;1 og konstanter c;1,...,c;n, c°;1,...,c°;n der vi har:
(i) t;(x;1,...,x;n)[c;1,...,c;n] = t;1
(ii) t;(x;1,...,x;n)[c°;1,...,c°;n] = t;2
(iii) ¢(c;i) = ¢(c°;i) for i = 1,...,n (n≥0)

Lemma 6.2 Anta L;2 og L;1 er I;0-språk og at L;2 er et språk for L;1. Anta ¢ er en F-morfi fra L;1 over i fl(L;2). Anta FêFml(L;1) og at t, t;1,...,t;nêTerm(L;1). Da gjelder:
(a) ¢(F;(x;1,...,x;n)[t;1,...,t;n]) = ¢(F);(x;1,...,x;n)[¢(t;1),...,¢(t;n)]
(b) ¢(t;(x;1,...,x;n)[t;1,...,t;n]) = ¢(t);(x;1,...,x;n)[¢(t;1),...,¢(t;n)]

Lemma 6.1 og Lemma 6.2 er helt analoge med de tilsvarende hjelpesetningene Lemma 2.2 og Lemma 2.3 i Rognes [1], Kapittel III, §2.

Man kan også vise:

Lemma 6.3 Anta L;2 og L;1 er I;0-språk og at L;2 er et språk for L;1. Anta ¢ er en F-morfi fra L;1 over i fl(L;2). Anta F,GêFml(L;1) og at ¢(F) = ¢(G). Da har man «F»=«G». Har man t,t'êTerm(L;1) og ¢(t) = ¢(t') gjelder «t» = «t'».

I forbindelse med den modellteorien vi nå er i ferd med å fremstille trenger vi også begrepet 'avledet F-morfi'. Dette er definert ved:

Definisjon 6.6 la ¢ være en F-morfi fra L;1 over i fl(L;2) der L;2 er et språk for L;1. (L;1 og L;2 er I;0-språk). Vi definerer *den avledete F-morfien fra fl(L;1) over i fl(L;2)* , ¢°, ved å sette:
(1) ¢°(u) = ¢(u) om u er et predikat, funksjonssymbol, singulær term i snever forstand, eller konstant i L;1.
(2) ¢°(U) = U
(3) ¢°(V) = V
(4) ¢°(J;<m,n>) = J;<m,n> om <m,n>êNxN
(5) ¢°(P(t;1,...,t;n)) = ¢°(P)(¢°(t;1),....,¢°(t;n))
(6) ¢°(¬F) = ¬¢°(F)
(7) ¢°(F–> G) = ¢°(F) –> ¢°(G)
(8) ¢°((Ax)F) = (Ax)¢°(F)
(9) ¢°(f(t;1,....,t;n)) = ¢°(f)(¢°(t;1),....,¢°(t;n))
(10) ¢°((ix)F) = (ix)¢°(F)
(11) ¢°(¥(«F»)[a;1,...,a;n]) = ¥(«¢°(F)»)[¢°(a;1),...,¢°(a;n)] om ¥(«F») er et spesielt funksjonssymbol i fl(L;1), Grad(«F»)= n og man har at F = «F»[a;1,...,a;n]

Definisjon 6.7 Anta R er en modell for I;0-språket L. Vi setter da:
Z;(fl,R,L) = ¢°"CFml(fl(L)(R))

Vi definerer nå klassen av "neo-seminormale I;0-modeller for L":

Definisjon 6.7.1 Klassen av alle de modeller R for L, der L er et I;0-språk, som oppfyller de følgende krav kalles for mengden av de neo-seminormale I;0-modellene for L og betegnes med NSem;(I;0)(L):

(1) Rest(G(R), Z;(fl,R,L)) er en korrelasjon
(2) G(R)"Z;(fl,R,L) Ω G(R)"(CFml(fl(L)(R)) – Z;(fl,R,L) =ø
(3) *f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)ΩX;(fl,R,L) Inkl Tr;(fl,R,L) om <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator i L.

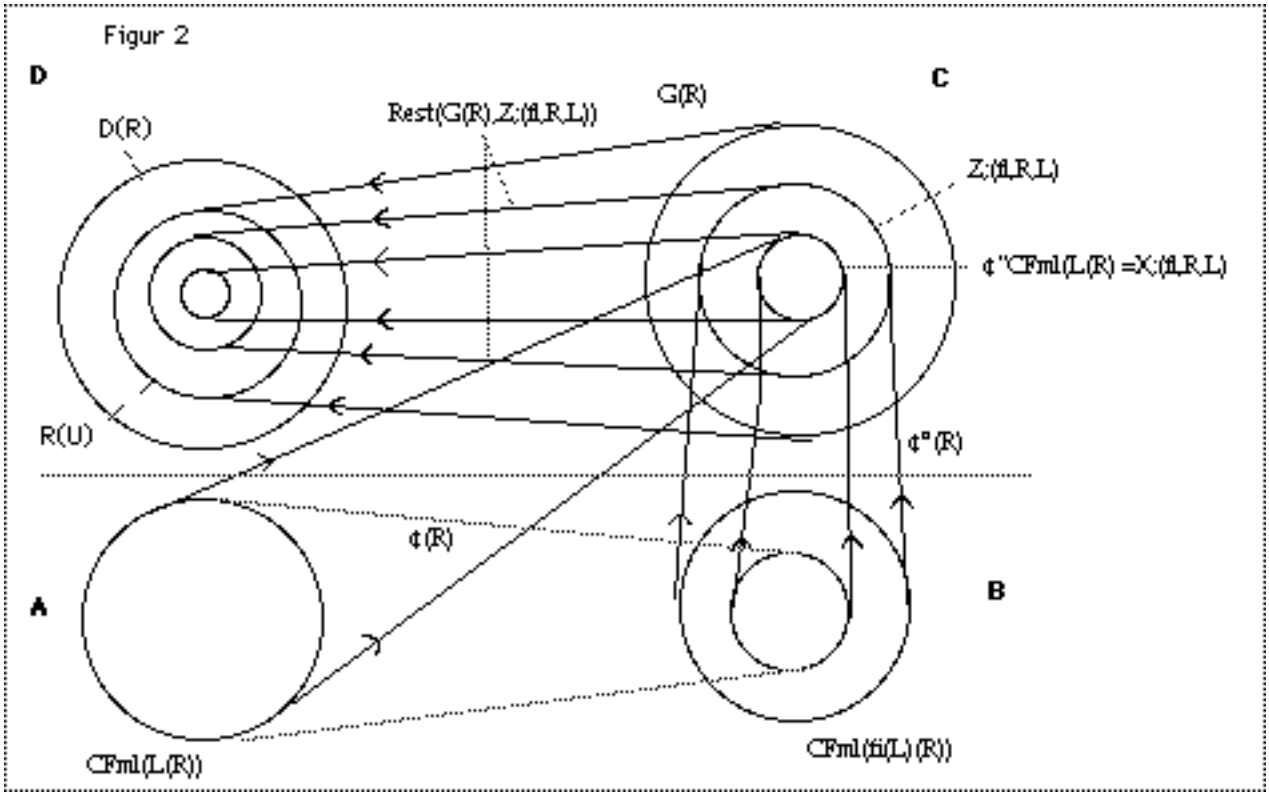
Vi kan nå formulere to nye fullstendighetsresulateter for I;0:

Teorem 6.3

(i) Anta T = ß(Δ,I;0,L) er en I;0-teori L der L er et I;0-språk. Anta RêFSem;(I;0)(L) og dessuten at R:= Δ. Da gjelder R:= T.

(ii) Anta T' = ß(Δ',I;0,L') er en konsistent I;0-teori i L' der L' er et I;0-språk. Da finnes en RêFSem;(I;0)(L') slik at R:= T'.

Teoremet ovenfor er et fullstendighetsresultat med hensyn på F-seminormale I;0-modeller. Resultatet nedenfor er med hensyn på neo-seminormale I;0-modeller.



Figuren ovenfor er ment som en helt uformell illustrasjon. Det er meningen at den skal tjene til å illustrere noen viktige trekk ved forholdet mellom en del av komponentene i en neo-seminormal I;0-modell. Sirkelen A under den stiplede linjen representerer mengden av de lukkede formlene i objektspråket L utvidet med navnene assosiert med modellen R for L. Figuren er selvfølgelig ikke ment til bruk ibevis el. Men den kan brukes til å gjøre forholdet mellom visse av komponentene i en neo-seminormal I;0-modell klarere og mer anskuelige. Av og til kan det være til hjelp for ens intuisjoner angående kompliserete logiske forhold å ha for seg slike anskuelige figurer som representerer deler ved, og forhold mellom, komponentene i de strukturene man arbeider med. Figuren må naturligvis tas med alle mulige forbehold!

Teorem 6.4

(i) Anta T = ß(Δ,I;0,L) er en I;0-teori L der L er et I;0-språk. Anta RêNSem;(I;0)(L) og dessuten at R:= Δ. Da gjelder R:= T.

(ii) Anta T' = ß(Δ',I;0,L') er en konsistent I;0-teori i L' der L' er et I;0-språk. Da finnes en RêNSem;(I;0)(L') slik at R:= T'.

Den følgende definisjon er analog med Definisjon 2.2.1:

Definisjon 6.8 Anta NSem;(I;0)(L). Da er k(R)=<*',D',∏'> første-ordens-strukturen for fl(L) der komponentene *',D' og ∏' er definert slik:

(i) *' = *

(ii) D' = |R|UCFml(£(R))

(iii) ∏' er en valuasjon som er definert ved:

(a) ∏'(e) = ∏(R)(e) om e er en konstant i L

(b) ∏'(d) = ∏(R)(d) om d er en singulær term i snever forstand i L

(c) ∏'(P) = ∏(R)(P) om P êPred;n(L) (n≥1)

(d) ∏'(f) = ∏(R)(f)U Rest((I;<n,1>), (CFml(£(R))– |R|)^n) om fêFunk;n(L) (n≥1)

(e) ∏'(t;<m,n>) = ∏(R)(t;<m,n>)

(f) ∏'(U) = ∏(R)(U)

(g) ∏'(J;<m,n>) = Mg(<x;1,...,x;n,y>: yê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;n)) forutsatt at <m,n>êNXN.

(h) ∏'(¥(«F»)) = Mg(<«¢°(R)(F)»[f(x;1),....,f(x;n)],x;1,....,x;n>: x;1,...,x;nê|R|) U Rest((I;<n,1>), (CFml(£(R))– |R|)^n) forutsatt at FêFml(fl(L)) og Grad(«F»)=n.

(i) ∏'(V) = |R|

(j) ∏'(G) = G(R)U Rest(I,CFml(£(R))–|R|)

Bemerkning: Vi bruker de samme navnene i j(R) og R på elementene i |R|. Når det gjelder elementene i CFml(£(R)) – |R| bruker vi nye navn i j(R) som ikke brukes i modellen R.

De følgende hjelpesetningene er analoge med Lemma 2.2.1 og Lemma 2.2.2 i §2:

Lemma 6.4 Anta at L er et I;0-språk. Anta videre at RêNSem;(I;0)(L) og anta at FêCFml(L(R)) og têCTerm(L(R)). Da gjelder:

(i) R(F) = k(R)(∂(F))

(ii) R(t) = k(R)(∂(t))

Lemma 6.5 Anta at L er et I;0-språk. Anta videre at RêNSem;(I;0)(L). Da gjelder det at k(R) er en modell for første-ordens teorien ß;f(Δ;0,fl(L)).

Vi bemerker også at vi har bruk for de følgende hjelpesetninger:

Lemma 6.6 Anta at L;1, L;2 er I;0-språk og at L;2 er et språk for L;1. Anta ¢ er en F-morfi fra L;1 over i fl(L;2). Anta FêFml(L;1) & têTerm(L;1) og ∂ er ∂-intepretasjonen av L;1 inn i fl(L;2)[3]. Da gjelder:

(a) ¢(F) = ¢°(∂(F))

[3] Se Definisjon 5.1.

(b) $\not{c}(t) = \not{c}^{\circ}(\partial(t))$

Har man videre F = «F»[a;1,...,a;n] og t = «t»[a';1,....,a';m] gjelder også:

(c) $\not{c}(F) = «\not{c}^{\circ}(\partial(F)»[\not{c}(a;1),....,\not{c}(a;n)]$

(d) $\not{c}(t) = «\not{c}^{\circ}(\partial(t)»[\not{c}(a';1),....,\not{c}(a';m)]$

Lemma 6.7 Anta R er en modell for L der L er et I;0-språk.[4] Da gjelder:
X;(fl,R,L) Inkl Z;(fl,R,L)

Lemma 6.8 Anta L er et I;0-språk. Da gjelder:
NSem;(I;0)(L) Inkl F-Sem;(I;0)(L).

Definisjon 6.9 Anta T = ß(Δ,I;0,L) er en I;0-teori i L. (L er et I;0-språk.) Vi sier da at T er en normal teori hvis og bare hvis man har at det finnes tellbart uendelig mange konstanter e;1,...,e;n,..... i L slik at:

(1) T :– (e;i≠e;j) om i≠j (i,jêN-{0})

(2) T :– U(e;i) & ¬(EF)(FêFml(L) & T;– (e;i = μ(F))) for alle i≥1.

Lemma 6.9 Anta T = ß(Δ,I;0,L) er en konsistent I;0-teori i L. Da finnes det en komlett og normal Henkin I;0-teori T' = ß(Δ',I;0,L') der L' er en utvidelse av L med utelukkende nye konstanter og Δ Inkl Δ'.

Dette Lemma er en umiddelbar konsekvens av Lemma 8.2, §8 i Rognes [2].

Bevis for Teorem 6.3 – 6.4: Gyldighetsdelene i Teorem 6.3 – 6.4 er greie. Vi i denne forbindelse bare på et enkelt aksiomskjema, nemlig A16. Man har da om R er en vilkårlig modell i NSem;(I;0)(L) at følgende holder:

(1) R(t;<m,n>(t;1,...,t;m,μ(F)) = 1 <–>
G(R)($\not{c}$(F))êG(R)"f;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;m))

Nå har man at (2) $\not{c}$(F)êX;(fl,R,L) Inkl Z;fl,R,L). Fra høyre side i (1) følger det at det finnes HêCFml(£(R)) slik at

(3) G(R)($\not{c}$(F)) = G(R)(H) & Hêf;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;m))

I lys av (2), (3) og Definisjon 6.7.1 følger det at H = $\not{c}$(F) og derfor at $\not{c}$(F)êf;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;m)). Dette impliserer at R(T;<m,n>(t;1,...,t;m)) = 1. Dette er hva vi ønsker. At kondisjonalen den andre veien i A16 er gyldig er ikke vanskelig å bringe på det rene.

Vi skal nå se litt nærmere på kompletthetsdelen av Teorem 6.4. Vi antar at vi starter med en konsistent I;0-teori T"=ß(Δ",I;0,L") i et I;0-språk L". I lys av satser vi tidligere har bevist følger det da at det finnes komplett, konsistent, Henkin-teori T'=ß(Δ',I;0,L') som er en utvidelse av T". Ifølge Lemma 6.9 finnes det da en komplett, *normal*, Henkin-teori T = ß(Δ,I;0,L), der L er en utvidelse av L' med nye konstanter, men ikke noen andre symboler, og der Δ' Inkl Δ. Vi definerer ~;T over Const(L) ved å sette at e ~;T e' <–> T :– (e = e') om e,e'êConst(L). ~;T er en ekvivalensrelasjon. Er eêConst(L) betegner vi ekvivalensklassen til e med hensyn på ~;T med [e];T. I den utstrekning misforståelser ikke kan oppstå utelater vi subskripten "T" i uttrykket "[e];T". Vi innfører altså en slik ekvivalensrelasjon og dessuten en utvalgsfunksjon √ over
Mg([e];T: eêConst(L)). Vi skal definere en modellstruktur M;T for L der

M;T = <*;T,D;T,f;T,£;T,<f;T<m,n>>/<m,n>êNxN/, G;T> der komponentene er definert som følger:

[4] Se Definisjon 6.3.

(1) Vi lar *;T være en vilkårlig formel i L. Dessuten setter vi D;T = Mg(√([e];T) : eêConst(L)) og f;T = Rest(I,D;T). f;T er altså identitetsavbildningen begrenset til D;T.

(2) Vi betrakter fl(L). Vi kaller fl(L) med konstantmengden begrenset til D;T for fl(L);T og setter £;T = fl(L);T.

(3) Vi definerer en F-morfi ¢;T fra L over i fl(L);T ved å sette at ¢;T(e) = √([e];T) om eêConst(L) og ¢;T(u) = u om u enten er et predikat, et funksjonssymbol, et variabeltegn eller en singulær term i snever forstand i L. Er FêFml(L) og er alle konstantene i F med i D;T må vi da ha at ¢(F)êFml(fl(L);T).

(4) Vi setter:

G1 = Mg(<√([e],¢(F)>: FêCFml(L) & T:– (e = μ(F))

(5) Vi trenger også de følgende definisjoner:

(5.1) c1 = Mg(√([e]): eêConst(L) & (EF)(FêCFml(L) & T:– (e=μ(F)))

(5.2) c2 = Mg(√([e]): eêConst(L) & T:–(U(e)) &
¬((EF)(FêCFml(L) & T :–(e=μ(F)))))

Vi har da:

(5.3) c1Ωc2=ø

(5.4) c1Uc2 = Mg(√([e]): eêConst(L) & T:– (U(e)))

I lys av at T er en normal I;0-teori (Se Definisjon 6.9) følger det at vi må ha:

(5.5) Cd(c2) ≥ Aleph;0

(6) Vi betrakter H = CFml(fl(L);T) – ¢"CFml(L). Denne mengden må være tellbart uendelig og det finnes derfor en korrelasjon G2 som har H som domene og c2 som verdiområde. Man kan vise:

(6.1) G1 er en korrelasjon.

Vi definerer G;T = G1UG2. Det er da lett å vise at

(6.2) G;T er en korrelasjon der Dom(G;T) = CFml(fl(L);T) og
Rgn(G;T) = c1Uc2

(7) Det er nødvendig å definere de diverse operatorfunksjonene *f*;T<m,n> der <m,n>êNxN. Vi setter:

(7.1) *f*';T<m,n>(√([e;1]),...,√([e;m])) = Mg(¢;T(F): FêCFml(£) &
T:– T;<m,n>(e;1,...,e;m,F))

(7.2) p;<m,n>(√([e;1]),...,√([e;m])) =
Mg(H: HêCFml(fi(L);T)–¢;T"CFml(L) &
(Ee)(eêc2 & T:– t;<m,n>(e;1,...,e;m,e) &
HêG2;-1"({e})))

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av modellstrukturen M;T.

(8) Vi definerer en valuasjon ∏;T på samme måten som i våre tidligere fullstendighetsbevis. Vi setter f.eks.

∏;T(P) = Mg(<√([e;1]),...,√([e;n])>: T:– P(e;1,....,e;n))

Tilsvarende for de andre ikke-logiske symbolene i L. Dermed har vi definert en modell R;T = <M;T, ¢;T,∏;T> for L. Det skulle nå ikke være noen spesielle problemer forbundet med å verifisere:

(8.1) R;Tê NSem;(I;0)(L).

Den følgende hjelpesetning blir bevist på omtrent samme måte som i våre tidligere fullstendighetsbevis:

Lemma Anta FêCFml(L), têCTerm(L) og eêConst(L). Da gjelder:

(1) T:– F <–> R;T(F) =1

(2) T:– (t =e) <–> R;T(t) = √([e]).

Ved hjelp av denne hjelpesetningen kan man så slutte: R;T := T. Nå er det lett å vise at R;T|L' êNSem;(I;0)(L') og derfor at R;T|L' := T'. Begrenses R;T ytterligere til L" finner man videre at den restriksjonen av R;T også må være en modell for T". Dette avslutter skissen av kompletthetsbeviset for Teorem 6.4. Vi bemerker at fullstendighetsdelen i fullstendighetsbeviset for Teorem 6.3 følger fra en tilsvarende delen i Teoremet 6.4 i lys av Lemma 6.8.

Bemerkning. Nærmere undersøkelser viser at fullstendighetsbeviset ovenfor kan forenkles vesentlig på visse punkter om man i stedenfor Definisjon 7.3 benytter den følgende definisjon som gjør definisjonene 7.1 og 7.2 overflødige:

(7.3b) f;T<m,n>(√([e;1]),....,√([e;m])) =
Mg(H: (Ee)(T:– t;<m,n>(e;1,...,e;m,e) & Hê(G;T);-1"({e})

Vårt bevis for fullstendigheten til I;0 med hensyn på Sem;(I;0)(L) i Rognes [1] kan også vesentlig forenkles om vi benytter den følgende definisjon av f*;<m,n>

f*;<m,n>(√([c;1]),...,‹([c;m])) =
Mg(H: (Ee)(T:– t;<m,n>(e;1,...,e;m,e) & Hê(G*);-1"({e})

Denne definisjonen er analog med (7.3b).

Når det gjelder Lemma 6.6 – Lemma 6.8 skal vi ikke gi noen detaljerte bevis for disse hjelpesetningene. Bevisene er lange og temmelig kjedelige induksjons-bevis som er av rutinemessig karakter. Det samme gjelder Lemma 6.1 – 6.3. Heller ikke Lemma 6.5 skulle by på noen spesielle vanskeligheter.

Vi skal imidlertid se på et par av trinnene i beviset for Lemma 6.4.

(a) Det kan ha en viss interesse å se på det tilfellet at F = μ(H). Da har vi: ∂(μ(H)) = G(¥(«∂(H)»)[c;1,...,c;n]) i det vi antar at ∂(H) = «∂(H)»[c;1,...,c;n] og at c;1,....,c;n er de konstanter og navn i L(R) som forekommer i H.

Vi må ha:

(1) k(R)(∂(μ(H))) = k(R)(G(¥(«∂(H)»)[c;1,...,c;n]))
= k(R)(G)(k(R)(¥(«∂(H)»))(k(R)(c;1),...,k(R)(c;n))
= G(R)(k(R)(¥(«∂(H)»))(d;1,...,d;n))

i det vi setter d;i = k(R)(c;i) for i = 1,...,n. Nå har man d;i = R(c;i). Derfor:

(2) k(R)(¥(«∂(H)»))(d;1,...,d;n) = «¢°(∂(H))»[f(R)(R(c;1)),.....,f(R)(R(c;n))]
= «¢°(∂(H))»[¢(c;1),...,¢(c;1)]
= ¢(H) i lys av Lemma 6.6

På den annen side har man:

R(μ(H)) = G(R)(¢(H)). Men dette, (1) og (2) gir oss R(μ(H)) = k(R)(∂(μ(H))) som er det vi ønsker.

(b) Vi tar også for oss det tilfellet at F = T;<m,n>(t;1,...,t;m,H). Da har man:

∂(F) = J;<m,n>(∂(t;1),...,∂(t;m),¥(«∂(H)»)(c;1,....,c;n))

i det vi antar at ∂(H) = «∂(H)»[c;1,...,c;n]) der c;1,...,c;n er konstanter eller navn i L(R). Nå har man:

k(R)(∂(F)) = 1 <–> k(R)(¥(«∂(H)»)(c;1,....,c;n))êf(R);<m,n>(R(t;1),...,R(t;m))

I lys av (2) ovenfor og IH har man derfor:

k(R)(∂(F)) = 1 <–> ¢(H)êf;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;m))
<–> R(T;<m,n>(t;1,...,t;m,H) =1.

Dette er hva man ønsker.

Vi overlater resten av tilfellene i beviset til en eventuelt entusiastisk leser som ønsker å gjennomføre alle detaljer med pinlig nøyaktighet.

Vi kommer nå til et meget viktig punkt. I lys av det som så langt har blitt nevnt er det ikke vanskelig å bevise Teorem 5.4 siden vi har Teorem 6.4 og Lemma 6.4–6.5 til rådighet. Satsen bevises på nøyaktig samme måte som vi beviste det sterke intepretasjonsteoremet for I;0 inn i teorien ß;f(Δ;0UΔ;1,@(L)). Kondisjonalen mot høyre i Teorem 5.4 blir bevist ved induksjon på teoremene i T. I beviset for kondisjonalen mot venstre kan man benytte fullstendighetsteoremet Teorem 6.4 og hjelpesetningene Lemma 6.4 og Lemma 6.5. Beviset blir analogt med beviset for Teorem 2.2.4 i §2.

I teorien T = ß;f(Δ;0,fl(L)) bruker vi det følgende aksiom i stedenfor B11b, nemlig:

(A) J;<m,n>(x;1,...,x;m,¥(«∂(H)»)(a;1,...,a;n)) –>. D –> ∂(H)

der "D" brukes som forkortelse for "Konj/i,1,m/(V(x;i))& Konj/i,1,p/(V(c;i))" der c;1,...,c;p er de fri variablene og konstantene som forekommer i ∂(H). Videre forutsetter vi at HêFm(L), at ∂(H) = «∂(H)»[a;1,....,a;n] og at <m,n> er indeksen til en streng intesjonal operator, ie. at <m,n>êh.

Dette faktum innebærer at vi ikke har spesifisert teorien T helt uavhengig av L. For å kunne angi aksiomene av typen A in konkretio må man kjenne avbildningen ∂ og dermed indirekte L. La os med "A" betegne mengden av alle instanser av skjemaet (A) og la oss med "B" betegne mengden av alle de formler i fl(L) som er av formen:

(B) Konj/i,1,m/(V(x;i))& Konj/i,1,p/(V(a;i)) &
J;<m,n>(x;1,...,x;m,¥(«∂(H)»)(a;1,...,a;n)) –> H

Disse aksiomene lar seg spesifisere helt uavhengig av L.

La oss så definere: Δ:S = (Δ;0 –A)UB. Vi setter videre T;S = ß;f(Δ;S,fl(L)). Teorien T;S er spesifisert helt uavhengig av I;0-språket L. Som man ser er også T;S en noe sterkere første-ordens teori en T i det man åpenbart har: T SInkl T;S.

Teorem 5.4 kan nå skjerpes til det følgende teorem:

Teorem 6.5 Anta L er et I;0-språk og at T = ß(Δ,I;0,L) er en I;0-teori i L. Sett per definisjon Δ;1 = e1"Δ. Da gjelder for alle FêFml(L) at

FêT <–> e1(F)êß;f(Δ;SUΔ;1, fl(L))

Beviset for denne satsen er forholdsvis komplisert. Vi trenger nemlig en litt skarpere definisjon av fullstendighetsteoremet Teorem 6.4. I beviset for dette teoremet konstruerer vi en vis neo-seminormal I;=-modell R;T. Det vi nå ønsker er å kontruere en neoseminormal I;0-modell, la oss si R, gitt en konsistent I;0-teori T= ß(Δ,I;0,L), som er slik at *f*;<m,n>(R) for <m,n>êh ikke bare oppfyller kravet:

(1) *f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)ΩX;(fl,R,L) Inkl Tr;(fl,R,L)

men i tillegg oppfyller kravet:

(2) Hê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)Ω(Z;(fl,R,L) – ¢"CFml(L(R))). –>

(EF)(FêCFml(fl(L)(R)) & H = ¢°;R(F) & k(R)(F)=1)

Vi trenger en slik R for at k(R) skal være en modell for alle aksiomene i mengden B. Vi skal nå gi en skisse av beviset for Teorem 5.

Det er hensiktsmessig å starte med den følgende definisjonen:

Definisjon 6.10 En I;0-teori T=ß(Δ,I;0,L) der L er et I;0-språk er "supernormal" hvis og bare hvis det finnes en tellbart uendelig mengde med konstanter k;1,k;2,.... i L slik at følgende holder:

(i) T :– (k;i≠ k;j) om i≠j
(ii) Konj/i,1,∞/((AF)(FêFm(L) –> T :– (k;i≠F)))
(iii) Konj/i,1,∞/(T:– (U(k;i)))
(iv) For alle <m,n>êh og alle iêN gjelder T:– ¬t;<m,n>(x;1,...,x;m,k;i)

Vi bruker uttrykket "supernormal" i mangel av et bedre uttrykk. Definisjon 6.10 bør sammenlignes med Definisjon 6.9.

Man kan nå bevise:

Teorem 6.6 Anta T= ß(Δ,I;0,L) er en kosistent I;0-teori i L. Da finnes det en supernormal komplett Henkin- I;0-teori T' = ß(Δ',I;0,L') i L' der L' er en utvidelse av L med bare konstanter og hvor Δ Inkl Δ'.

Vi vil vente litt med beviset for denne påstanden, men bemerker allerede på dette punkt at beviset er av samme type som beviset for Lemma 6.9. Beviset benytter fullstendighetsteoremet for I;0 med hensyn på Sem;(I;0)(L). Man ser dessuten at Lemma 6.9 er et korollar til Teorem 6.6 siden supernormale I;0-teorier er normale I;0-teorier.

Det følgende teorem er viktig:

Teorem 6.7 Anta T'=ß(Δ',I;0,L'), der L' er et I;0-språk, er en konsistent I;0-teori. Da finnes en RêNSem;(I;0)(L) der vi har:

(i) R := T'
(ii) Er Fê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)Ω(Z;(fl,R,L) – ¢"CFml(L(R))) har man at F er en instans av et gyldig setningslogisk skjema i £(R), dvs. at F er en tautologi i £(R).

Dette er den ønskede, skjerpede versjon, av Teorem 6.4 som vi trenger.

Beviset for Teorem 6.7 er i hovedtrekkene som beviset for Teorem 6.4. Vi konstruerer først en modellstruktur:

M;T = <*;T,D;T,f;T,£;T,<*f*;T<m,n>>/<m,n>êNxN/, G;T>

på sammen måte som i beviset for Teorem 6.4. Et unntak inntreffer imidlertid ved funksjonen G;T. Vi definerer G1 som i beviset for Teorem 6.4. Vi har at
T = ß(Δ,I;0,L) er en supernormal komplett Henkin-teori i L der L er en utvidelse av L' med nye konstanter og Δ' Inkl Δ. Vi er forsikret om eksistensen av en slik utvidelse av T' i kraft av Teorem 6.6. Vi betrakter nå mengden A Inkl Const(L) som er definert ved at eêA hvis og bare hvis det finne <m,n>êh og konstanter e;1,...,e;mêConst(L) slik at (i) eêc2 og (ii) T:– t;<m,n>(e;1,....,e;m,e). A kan enten være endelig eller uendelig. I tilfelle A er endelig er to tilfelle igjen tenkelige, nemlig at c2–A enten er tellbart uendelig eller endelig. Nå er det siste tilfellet utelukket siden T er supernormal I;0-teori. Vi har derfor i alle tilfelle at c2–A er tellbart uendelig.

(i) Anta A er endelig. Da er A= {c;1,...,c;p} (p≥0). Vi velger da ut p tautologiske formler D;1,...,D;p fra H= CFml(fl(L);T) – ¢;T"CFml(L) og definerer G2 slik at G2 (D;i)=c;i

for i=1,...,p og anordner det slikat G;2 er en korrelasjon mellom c;2–A og H–{D;1,...,D;p}. (Vi forutsetter at c;1,...,c;p er distinkte og også at D;i'ene er distinkte.

(ii) Anta A er uendelig. Vi plukker da ut en uendelig mengde med distinkte tautologier L fra H og anordner det slik at G2 avbilder L en-entydig på A og H–L en-entydig på c2–A.

Dermed er G2 definert i alle tilfelle. Man kan så definere G;T ved å sette G;T = G1UG2. Man ser at dette i alle tilfelle er en korrelasjon mellom CFml(£;T) og c1Uc2. Resten av modellen R;T defineres som før.

Som tidligere kan man bevise at R;T|L' := T' og at R;T|L'êNSem;(I;0)(L). Videre ser man fra konstruksjonen ovenfor t R;T|L' nødvendigvis må tilfredstille kravet (ii) i Teorem 6.7. Dette skulle være tilstrekkelig for å antyde hvordan Teorem 6.7 kan bevises.

Vi trenger det følgende lemma for å kunne bevise den sterke versjonen av intepretasjonsteoremet, Teorem 6.5.

Lemma 6.10 Anta RêSem;(I;0)(L) der L er et I;0-språk og at vi at dersom Fê*ƒ*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)Ω(Z;(fl,R,L) – ¢"CFml(L(R))) er F en tautologi i £(R). Da gjelder at k(R):= B

Beviset for dette skulle være likefrem.

Det skulle nå være klart hvordan den vanskelige delen i Teorem 6.5 bevises ved hjelp av Teorem 6.7, Lemma 6.10, Lemma 6.4 og Lemma 6.5.

Det gjenstår derfor bare et punkt i vår tankegang som må undersøkes nøyere og det er hvordan man skal bevise Teorem 6.6. For å bevise denne satsen skal vi bevise den følgende hjelpesetning:

Lemma 6.11 Anta T = ß(Δ,I;0,L) er en I;0-teori i L der L er et I;0-språk. La L;k være L utvidet med tellbart uendelig mange, helt nye, konstanter k;1, k;2,..... Vi utvider Δ til Δ;k ved å føye til de følgende formler:

(1) k;i≠k;j om i≠j
(2) UN/iêN/(Mg(k;i≠μ(F): FêFml(L;k))
(3) UN/iêN/{¬t;<m,n>(x;1,...,x;m,k;i)} for alle <m,n>êh
(4) Mg(U(k;i): iêN)

Vi setter T;k = ß(Δ;k,I;0,L;k). Gitt disse forutsetningene gjelder det at dersom T er konsistent er også T;k konsistent.

Det er åpenbart at T;k ved konstruksjon er en supernormal I;0-teori. Anta T'=ß(Δ',I;0,L') er en Henkin-Lindenbaum utvidelse av T;k, dvs. at den er en komplett Henkin-teori der L' er L;k utvidet med spesielle konstanter og Δ'–Δ;k inneholder alle de spesielle aksiomene for de spesielle konstantene. Vi skal vise at også T' er en supernormal I;0-teori. Det er åpenbart at T' tilfredsstiller kravene (i), (iii) og (iv) i Definisjon 6.10. Vi viser at T'også oppfyller kravet (ii). Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes en formel F der man har (1) ¬(T':– (k;i≠μ(F)). Siden T' er en komplett teori følger (2) T' :– (k;i=μ(F)). La c;1,...,c;n være de konstantene i F som ikke forekommer i L;k. Sett

F' = F;(c;1,...,c;n)[y;1,...,y;n] der y;1,...,y;n er helt nye distinkte variabler. Det er åpenbart at F'êFml(L;k). Derfor har vi (k;i≠μ(F')êΔ;l og følgelig

T;k :– (k;i≠μ(F'). Det følger at T;k :– (Ay;1)...(Ay;n)(k;i≠μ(F')). Herav kan man så slutte: T' :– (k;i≠μ(F'));(y;1,....,y;n)[c;1,....,c;n]. Da har man:

T' :– (k;i≠μ(F';(y;1,...,y;n)[c;1,...,c;n])). Dette innebærer imidlertid i lys av definisjonen av F' at T' :– (k;i≠μ(F)) som strider mot (2) og det faktum at T' er konsistent

siden den er komplett. Dette viser at Teorem 6.6 følger om man kan ta riktigheten av Lemma 6.11 for gitt.

La oss nå gi et bevis for Lemma 6.11: Anta T er en konsistent I;0-teori. Det er tilstrekkelig å vis at T° = ß(Δ',I;0,L;k) er konsistent for hver endelig del Δ' av Δ;k. Vi kan også begrense oss til å betrakte de Δ' som inneholder følgende formler for noe p,sêN og hvor q er en endelig delmengde av h (indeksmengden for de strenge intensjonale operatorene):

(1) k;i≠k;j om 1≤i≠j≤s
(2) U(k;i)) om 1≤i≤s
(3) ¬t;<m,n>(x;1,...,x;m,k;i) for de i der 1≤i≤s og hvor man har <m,n>êq.
(4) k;i≠μ(F;j) der 1≤i≤s og jê{1,...,p}

Anta derfor at k;1,...,k;s er konstanter og F;1,...,F;s er formler slik at (1) – (4) er med i Δ'. Siden T er konsistent finnes det i lys av kompletthetsteoremet for I;0 med hensyn på Sem;(I;0)(L) en RêSem;(I;0)(L) slik at (0) R:= T. Vi skal utvide denne til en modell R' for L;k, ie. slik at R'êSem;(I;0)(L;k) og slik at R':=T°. Da vet vi at T° er konsistent.

La nå yêQ(R) hvis og bare hvis det finnes t slik at 1≤t≤p, det finnes x;1,...,x;nê|R| slik at y = G(R)(«g(R)(F;t)»[f(x;1),...,f(x;n)]). Vi må ha at R(U)–Q(R) er tellbart uendelig. La videre y være et element i S(R) hvis og bare hvis det finnes <m,n>êQ og x;1,...,x;mê|R| slik at <x;1,...,x;m,y>êR(t;<m,n>). Ved et forholdsvis enkelt resonnement ser man at

(5) R(U) –(Q(R)US(R)) er en tellbart uendelig mengde.

Man har derfor at R(U) – (Q(R)US(R)) = {a;1, a;2,.....} for visse elementer a;1, a;2,...
Vi definerer R' nøyaktig som R men vi setter i tillegg at R'(k;i) = a;i for i=1, 2.....Vi kan da konkludere med at R'êSem;(I;0)(L;k). Det er lett å vise at R(F)= R'(F) om FêCFml(L(R)). Fra dette følger at R' := T. Det er også forholdsvis lett å verifisere at R' er en modell for formlene avtypen (1) – (4). Man har derfor at R' := T' som er det vi ønsker.

For å fylle alle hullene i dette resonnementet viser vi hvordan man innser at (5) holder: Vi kan finne en lukket konstantfri formel H i L som er distinkt fra formlene F;1,....,F;p. Man kan f.eks. la H' være formlen som fremkommer når man tar konjunksjonen av F;1,...,F;p og erstatter konstantene i disse formlene med helt nye distinkte variabler. Man kan så la H være den universelle lukningen av H'. La nå P;n være induktivt definert slik:

P;0 = (H&¬H)
P;(n+1) = P(n)&¬(P(n)).

Vi har at det må finnes tellbart uendelig mange formler i sekvensen <P(n)>/nêN/ som ikke er blandt F;1,...,F;n. (Før eller senere må lengden til formlene i <P(n)>/nêN/ overgå lengden til selv den lengste av formlene i rekken F;1,...,F;p.) Vi ser nå også på sekvensen <G(R)(P(n))>/nêN/. Anta for reduktio ad absurdum at G(R)(g(R)(P(n)))êS(R) for noe n>0. Da har vi at det finnes <m,n>êq Inkl h og x;1,...,x;m slik at <x;1,...,x;m,y>êR(t;<m,n>) og der y = G(R)(g(R)(P(n))). Det følger da fra definisjonen av R at:

G(R)(g(R)(P(n))) êG(R)"f;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) og derfor, siden R er seminormal at g(R)(P(n))êf;<m,n>(R)(x;1,....,x;n). Siden <m,n>êh må vi da ha at g(R)(P(n))êTr;L(R). Dette impliserer R(P(n)) =1. Men dette erumulig siden man har P(n)=G&¬G for en eller annen formel G. Man har derfor:

(6) ¬(G(R)(g(R)(P(n)))êS(R)) for alle n≥0.

Nå har man for noe q0 ≥0 at «g(R)(P(m))»ê{«g(R)(F;1)»,...,«g(R)(F;n)»} for alle m≥q0. Dette innebærer:

«g(R)(P(m))» = G(R)(P(m)) ≠ «g(R)(F;s)»[f(x;1),...,f(x;n)] for alle x;1,...,x;n, og alle sê{1,...,p} og alle m≥q0 om vi antar at Grad(«F;s»)=n. Vi må derfor ha :

(7) ¬(G(R)(g(R)(P(m)))êQ(R)) for alle m≥q0. Siden vi har
(8) G(R)(g(R)(P(m)))êR(U) for alle m≥q0 følger i lys av (6) og (7) at:

G(R)(g(R)(P(m)))ê(R(U) – (Q(R)US(R)) for alle m≥q0. Men dette innebærer at R(U) –

(Q(R)US(R)) er tellbart uendelig, med andre ord at (5) holder.
Dette avslutter vårt bevis for Lemma 6.11.

Når det gjelder beviset for Lemma 6.10 er det av interesse å nevne at de følgende to hjelpesetninger gjelder for den avledete F-morfien ¢°:

Lemma 6.12 Anta ¢ er en F-morfi fra L;1 over i fl(L;2) der L;2 og L;1 er I;0-språk og L;2 er et språk for L;1. La ¢° være den avledete F-morfien fra fl(L;1) over i fl(L;2). Under disse forutsetningene gjelder:
(a) Er F,GêCFml(fl(L;1)) og ¢°(F) = ¢°(G) finnes en formel H i fl(L;1) og konstanter c;1,...,c;n, c';1,...,c';n der vi har:
(i) H;(x;1,...,x;n)[c;1,...,c;n] = F
(ii) H;(x;1,...,x;n)[c';1,...,c';n] = G
(iii) ¢°(c;i) = ¢°(c';i) for i = 1,...,n (n≥0)
(b) Er t;1,t;2êCTerm(fl(L;1)) og ¢°(t;1) = ¢°(t;2) finnes en term t i fl(L;1), variabler x;1,....,x;n og konstanter c;1,...,c;n, c';1,...,c';n der vi har:
(i) t;(x;1,...,x;n)[c;1,...,c;n] = t;1
(ii) t;(x;1,...,x;n)[c';1,...,c';n] = t;2
(iii) ¢°(c;i) = ¢°(c';i) for i = 1,...,n (n≥0)

Lemma 6.13 Anta L;2 og L;1 er I;0-språk og at L;2 er et språk for L;1. Anta ¢ er en F-morfi fra L;1 over i fl(L;2). La ¢° være den avledete F-morfien fra fl(L;1) over i fl(L;2). Anta FêFml(fl(L;1)) og at têTerm(fl(L;1)). Da gjelder:
(a) ¢°(F;(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n]) = ¢°(F);(x;1,...,x;n)[¢°(a;1),...,¢°(a;n)]
(b) ¢°(t;(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n]) = ¢°(t);(x;1,...,x;n)[¢°(a;1),...,¢°(a;n)]

Vi utelater beviset for disse setningene siden de er helt analoge med bevisene for henholdsvis Lemma 6.1 og Lemma 6.2. Det dreier seg om induksjonsbevis som i alt vesentlig er av en rutinemessig karakter.

§7 Et intepretasjonsteorem for kalkylene av type I:0[Ç].

Vi skal i denne paragrafen bevise det følgende intepretasjonsteorem for kalkylene av typen I;0[Ç] som er definert i §4 i kapittel V i Rognes [1].

Teorem 7.1 Anta L er et I;0-språk og at Ç er en tillatt systemkarakteristikk over I. La T;1 = ß(Δ,I;0[Ç],L) være en I;0[Ç]-teori i L. Sett per definisjon:
Δ' = Δ;0Ue"(Ax(Ç,L))Ue"Δ. La T;2 = ß;f(Δ', @(L)). Da gjelder:
(AF)(FêFml(L) –> (FêT;1 <–> e(F)êT;2))

Bevis: Kondisjonalen mot høyre i (1) har vi allerede i det vesentlige bevist i §5. For å bevise kondisjonalen mot venstre beviser vi først det følgende lemma:

Lemma 7.1 Anta LêI og at Ç er en tillatt systemkarakteristikk over I. Anta dessuten at RêSem;(I;0)(Ç,L). Da gjelder j(R):= e"Ax(Ç,L).

Bevis for Lemma 7.1: Anta RêSem;(I;0)(Ç,L). Anta (1) Gêe"Ax(Ç,L). Da finnes det en formel (2) FêAx(Ç,L) slik at (3) G = e(F). Anta y;1,...,y;p er de variablene som forekommer fri i F og at c;1,...,c;k er de konstantene som forekommer i F. Da har man at

G = Konj/i,1,p/(V(y;i)) & Konj/i,1,k/(V(c;i)). –> ¶(F).
Siden FêAx(Ç,L) = UN/aêÇ/(E(a,L)) har vi at FêE(a,L) for et eller annet indekssystem aêÇ. Det følger at det finnes n,m,r og ¥ slik at
a= <[<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>], F,¥,r>. Komponentene i dette tuplet er som bekrevet i Kapittel V i Rognes [1]. Vi må sondre mellom tre tilfelle alt ettersom r=0,1,2.

Tilfelle (i): r=0. Da har man at operasjonen ¥ per definisjon har karakteristikk <m,n> og vi har at det må finnes

<F;1,....,F;n,x;1,...,x;m>êB;<n,m>(L) slik at
F=T;<m,q;1>(x;1,...,x;m,F;1) & .... & T;<m,q;n>(x;1,...,x;m,F;n) –>
T;<m,q;(n+1)>(x;1,...,x;m, ¥(F;1,...,F;n,x;1,...,x;m))
der vi forutsetter at den k'te konjunkten i antesedenten er utelatt om F(k)=0. Vi kan anta at <y;1,...,y;m>=<x;1,...,x;m> og at y;(m+1),...,y(m+(p–m)) er de resterende fri variablene i F. La i;1,...,i;p være navn i L(R). Det er tilstrekkelig å bevise:

(4) j(R)(¶(F;(y;1,...,y;p)[i;1,...,i;p])) = 1

Vi definerer D;j = (F;j);(y;1,....,y;p)[i;1,....,i;p] for j=1,...,n. Siden ¥ er substitusjonsinvariant er det tilstrekkelig å bevise er det tilstrekkelig å bevise at

(5) j(R)(¶(T;<m,q;(n+1)>(i;1,...,i;m, ¥(D;1,...,D;n,i;1,...,i;m))))=1

holder under forutsetning av at:

(6) Konj/sê{k: F(k)=1}/(j(R)(¶(T;<m,q;s>(i;1,...,i;m,D;s)) = 1)

holder. Anta derfor at (6) holder og at sêMg(k: F(k)=1). Ved hjelp av Lemma 2.2.1 i §2.2 har man da (7) R(T;<m,q;s>(i;1,...,i;m,D;s) =1. Nå har man at FêAx(Ç,L) og RêSem;(I;0)(L) og at Ç er tillatt over L. Disse tre tingene impliserer:

(8) R(F;(y;1,...,y;p)[i;1,...,i;p]) = 1

Men (7) og (8) impliserer, siden ¥ er substitusjonsivariant at

(9) R(T;<m,q;(n+1)>(i;1,...,i;m, ¥(D;1,...,D;n,i;1,...,i;m))) =1

I sin tur impliserer dette (5) ved hjelp av Lemma 2.2.1 i §2.2. Men dette var hva vi ville frem til.

Vi har nå gjennomført beviset i det tilfelle at r=0. Tilfellene der r=1,2 har i det vesentlige den samme struktur og overlates til leseren.

Vi fullfører nå beviset for Teorem 7.1 ovenfor.

Anta FêFml(L) og at (0) ¬(FêT;1). I lys av fullstendighetsteoremet for I;0[Ç] finnes det da en modell RêSem;(I,0)(Ç,L) som er slik at (1) ¬(R:= F) og (2) R:=T;1. Anta x;1,....,x;n er de fri variablene i F og at c;1,...,c;s er de konstantene som forekommer i F. Fra (1) har vi da at det finnes navn j;1,...,j;n i L(R) slik at

(3) R(F;(x;1,...,x;n)[j;1,...,j;n]) =0

Siden RêSem;(I;0)(Ç,L) må vi ha at RêMod;(I;0)(L) og derfor i følge Lemma 2.2.2 i §2.2 at (4) J(R):= Δ;0. Videre har vi fra (2) at R:= Δ. Ved hjelp av Lemma 2.2.1 i §2.2 følger fra dette at (5) j(R):= e"Δ. I lys av forutsetningene i Teorem 7.1 og Lemma 7.1 ovenfor har vi (6) j(R):= Ax(Ç,L). Fra (4) – (6) følger:

(7) j(R):= T;2.

Nå har man: (8) e(F) = [Konj/i,1,n/(V(x;i)) & Konj/j,1,s/(V(c;j)) –> ¶(F)]
Fra dette følger at

H = e(F);(x;1,...,x;n)[j;1,...,j;n] =
[Konj/i,1,n/(V(j;i)) & Konj/j,1,s/(V(c;j)) –> ¶(F;(x;1,...,x;n)[j;1,...,j;n])]

Anta nå for reduktio ad absurdum at (9) j(R)(H) =1. Siden j;1,...,j;n er navn i L(R) og R(c;p)ê|R|=R(V) om p=1,...,s følger det at

j(R)(Konj/i,1,n/(V(j;i)) & Konj/j,1,s/(V(c;j))) =1

Men dette og (9) impliserer j(R)(¶(F;(x;1,...,x;n)[j;1,...,j;n]))=1. Fra dette og Lemma 2.2.1 i §2.2 kan man slutte R(F;(x;1,...,x;n)[j;1,...,j;n]) =1. Men dette strider mot (3). Det følger at

(9) er usann og vi må derfor ha ¬(j(R):= e(F)). Dette og (7) impliserer imidlertid ¬(e(F)êT;2) ved hjelp av gyldighetsteoremet for første ordens teorier, Teorem 1.5.1 i §1.5. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Referanser

Rognes [1] Rognes, Morten. *Undersøkelser i intensjonal logikk.* Maskinskrevet manuskript, 1973.

Rognes [2] Rognes, Morten. *Resultater om sterk og svak kompletthet for den minimale intensjonale predikatlogikken I;0 og for beslektede ikke-klassiske systemer.* Maskinskrevet manuskript, 1974.

Rognes [3] Rognes, Morten. *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære.* Maskinskrevet manuskript, 1974.

Shoenfield [1] Shoenfield, Joseph. *Mathematical Logic.* London: Addison-Wesley, 1967.